Numératie

Mise à jour : Juin 2024

Éditeur au développement du thème :
Jeff Bisanz, Ph.D., University of Alberta, Canada

Table des matières

Synthèse

Est-ce important?

La numératie est parfois définie comme la compréhension des nombres en tant que représentation d’un type particulier de grandeur. Cette compréhension se reflète dans une variété d’habiletés et de connaissances (p. ex., savoir compter, faire la distinction entre des ensembles de quantités différentes, pouvoir effectuer des opérations comme les additions et les soustractions), ce qui fait que le terme « numératie » est souvent utilisé pour désigner une vaste gamme de concepts et d’habiletés liés aux nombres. En général, ces habiletés se développent sous une forme quelconque bien avant l’entrée à l’école. On pense à assurer l’enseignement des mathématiques à de jeunes enfants (EMJE) depuis plus d’un siècle, mais les discussions actuelles tournent autour des objectifs liés à l’enseignement de la numératie auprès des jeunes enfants et des méthodes qui devraient être utilisées pour atteindre ces objectifs. L’apprentissage des mathématiques peut et devrait être intégré aux activités quotidiennes des jeunes enfants à l’aide de motifs géométriques, de quantités et d’espaces. Offrir aux enfants amples occasions adaptées à leur développement pour leur permettre d’exercer leurs compétences en mathématiques peut renforcer le lien entre les habiletés précoces des enfants en mathématiques et l’acquisition de connaissances mathématiques à l’école. Malheureusement, tous les enfants n’ont pas les mêmes occasions quant à l’exercice de ces compétences, d’où l’importance de l’EMJE. La recherche sur la numératie et les habiletés précoces en mathématiques joue un rôle important dans l’élaboration du programme d’EMJE et la formulation de ses objectifs.

Les difficultés en mathématiques sont relativement courantes chez les enfants d’âge scolaire. Environ un enfant sur dix recevra un diagnostic de trouble d’apprentissage lié aux mathématiques au cours de sa scolarité. La dyscalculie développementale constitue l’une des formes les plus graves et les enfants qui présentent ce trouble sont incapables de compter ou de dénombrer les éléments d’un ensemble et de distinguer les nombres les uns des autres.

Que savons-nous?

Les connaissances de base en mathématiques s’acquièrent alors que l’enfant est au stade de nourrisson et peut être façonnée par une exposition précoce à la numération verbale. À six mois, les nourrissons sont capables de comprendre la différence entre de petits ensembles d'éléments de quantités différentes (entre les ensembles de deux et ceux de trois éléments) et peuvent même faire la distinction entre de plus grands nombres, à condition que le ratio entre les deux ensembles soit assez grand (p. ex., entre 16 et 32, mais pas entre 8 et 12). Ces représentations préverbales s'améliorent avec le temps et, quoiqu'insuffisantes, elles constituent le fondement de leur futur apprentissage des mathématiques.

L'acquisition de la maîtrise des procédés constitue l'une des réalisations en numératie. La maîtrise des procédés fait référence à la connaissance nécessaire pour générer des sommes et des différences au moment opportun en faisant preuve de polyvalence et de précision. Les très jeunes enfants acquièrent progressivement les compétences nécessaires pour maîtriser les procédés et commencent souvent par les nombres intuitifs (p. ex., savoir ce que représentent les chiffres un, deux et trois), puis sont ensuite capables de se rendre compte par exemple que tous les ensembles de trois éléments ont plus de constituants que les ensembles de deux éléments.

À mesure qu'ils grandissent, les enfants acquièrent une meilleure connaissance des nombres. À trois ans, ils commencent à être capables d'accomplir des tâches non verbales axées sur des objets, comme comprendre le processus d'addition et de soustraction et considérer un ensemble comme ayant un plus grand nombre d'éléments qu'un autre. Bien que les enfants d'âge préscolaire puissent associer des ensembles de deux, de trois et de quatre éléments si les objets sont de taille ou de forme semblables, ils ont encore de la difficulté lorsque les objets sont très différents (p. ex., apparier deux figurines d'animaux et deux points noirs). Les enfants d'âge préscolaire risquent aussi de facilement se laisser distraire par les caractéristiques superficielles d'un ensemble (p. ex., considérer qu'un ensemble contient plus d'éléments qu'un autre de même nombre, car ils sont disposés de façon à former une ligne plus longue). Le développement du sens des nombres dépend du niveau de représentation et de la taille des ensembles et est crucial pour l'établissement d'une trajectoire de réussite en mathématiques tout au long du primaire. Des recherches sont actuellement en cours pour déterminer comment les connaissances des quantités chez les nourrissons sont liées à la numératie chez l'enfant d'âge préscolaire et à la réussite scolaire subséquente.

Bien que la plupart des enfants soient naturellement capables de découvrir des concepts mathématiques, les expériences culturelles et l'environnement jouent un rôle dans le développement de leurs connaissances des nombres. Par exemple, l'acquisition du langage permet à l’enfant de résoudre des problèmes exprimés verbalement et de développer sa perception des nombres (p. ex., compréhension des nombres cardinaux, le nombre total d’éléments dans un ensemble). Les enfants qui n’ont pas eu assez d’expériences précoces liées aux nombres ont tendance à être en retard sur leurs pairs. Par exemple, les enfants venant de familles à faible revenu tendent à avoir peu de compétences en numératie à un jeune âge et ces faiblesses se traduisent ensuite par des difficultés en mathématiques à l’école. La performance en matière de problèmes numériques et les types de stratégies cognitives utilisées par les enfants sont susceptibles de changer considérablement d’un enfant à l’autre. Même la gamme de réponses d’un enfant peut varier de façon importante d’un essai à l’autre.

Le processus de développement du sens des nombres se fait progressivement et dès le préscolaire. Il est important de promouvoir le développement des compétences en numératie chez les jeunes enfants, car elles sont liées à la préparation des enfants à l’égard des mathématiques au moment de leur entrée à l’école et plus tard. Les enfants d’âge préscolaire qui savent compter, qui sont capables de nommer des nombres et de faire la distinction entre différentes quantités ont tendance à avoir de la facilité à effectuer des tâches numériques à la maternelle. En outre, les bonnes habiletés numériques des enfants constituent des prédicteurs de la future réussite scolaire, encore plus que les compétences en lecture, les capacités d’attention et les habiletés socio-affectives.

Que peut-on faire?

Étant donné les aptitudes des enfants à l’égard de l’apprentissage des nombres, on devrait les encourager à découvrir et à exercer leurs habiletés librement par la pratique d’une gamme d’activités non structurées. Ces expériences d’apprentissage devraient être agréables et appropriées sur le plan du développement, de façon à ce que les enfants continuent de pratiquer ces activités et ne se découragent pas. Les jeux de société et les autres activités par lesquelles les enfants se familiarisent avec les nombres peuvent les aider à développer leurs compétences en numératie. Les matériaux comme les cubes, les casse-têtes et les formes peuvent aussi favoriser la numératie.

Les parents peuvent encourager le développement des connaissances numériques de leurs enfants en leur permettant d’apprivoiser les nombres grâce à des expériences enrichissantes et en leur fournissant une rétroaction appropriée (p. ex., demander à l’enfant combien de pieds elle a et se servir de sa réponse pour lui expliquer pourquoi elle a besoin de deux souliers et non pas d’un seul). Les parents et les enseignants devraient aussi leur offrir des moments d’enseignement spontané qui encouragent les enfants à penser aux nombres et à en parler. Les nombres peuvent être intégrés à plusieurs domaines, dont le jeu (jeux de dés), l’art (dessiner un certain nombre d’étoiles) et la musique (battre un rythme de deux ou trois).

Comprendre que les problèmes mathématiques ainsi que la façon de les concevoir et de les interpréter sont différents chez les enfants et chez les adultes constitue ainsi des aspects importants de l’enseignement efficace. Les trajectoires d’apprentissage peuvent rendre accessible à tous les enfants un enseignement captivant et approprié à leur développement. Les enseignants doivent comprendre que l’acquisition de compétences en numératie se fait selon un processus développemental et que les activités qui intègrent les nombres doivent donc être conçues en conséquence. Pour faire en sorte que les interventions axées sur la numératie soient les plus efficaces possible, on devrait effectuer un dépistage à la maternelle pour s’assurer que les enfants sont capables de compter le nombre d’objets contenus dans un petit ensemble (deux ou trois objets) et de faire la distinction entre ces ensembles et les ensembles plus grands (quatre ou cinq objets).

Les interventions précoces en mathématiques ont d’importantes répercussions sur le plan de préparation à l’école. Un programme d’EMJE réussi inclut un environnement stimulant qui comprend des objets et des jouets qui encouragent le raisonnement mathématique (p. ex., des cubes et des casse-têtes), des occasions de jeu dans lesquelles les enfants peuvent eux-mêmes développer leurs habiletés mathématiques naturelles et en acquérir de nouvelles, et des moments d’enseignement où les éducateurs des enfants d’âge préscolaire leur posent des questions sur leurs découvertes mathématiques.

Les connaissances numériques des jeunes enfants

Catherine Sophian, Ph.D.

University of Hawaii, États-Unis

Juin 2009

Introduction

Au cours des dernières années, le nombre de recherches sur les connaissances numériques des jeunes enfants a rapidement augmenté. Ces recherches englobent une vaste gamme de compétences et de concepts : la capacité des nourrissons à différencier des ensembles contenant différents nombres d'éléments;[1,2] celle des enfants d'âge préscolaire à comprendre les mots représentant des chiffres,[3,4] à compter[5,6,7] ainsi que leur compréhension de la relation inverse entre l'addition et la soustraction.[8,9]

Sujet

La recherche sur les connaissances numériques des jeunes enfants constitue une base importante permettant de formuler des normes qui s'appliquent à l'éducation des jeunes enfants[10] et de concevoir des programmes d'enseignement des mathématiques destinés à la petite enfance.[11,12,13] De plus, les connaissances mathématiques que les enfants acquièrent avant de commencer leur scolarité officielle ont des répercussions importantes sur leur performance scolaire et sur leurs futurs choix de carrière.[14] Une analyse des variables prédictives de la performance scolaire basée sur six séries de données provenant d'études longitudinales révèle que les habiletés mathématiques des enfants à l'entrée à l'école prédisent plus efficacement la performance scolaire ultérieure que les habiletés précoces en lecture, les capacités d'attention ou les habiletés socioaffectives.[15]

Problèmes

Fondamentalement, la numératie suppose de comprendre les nombres en tant que représentation d'un type particulier de grandeur. En conséquence, pour comprendre comment la numératie se développe chez les jeunes enfants, il faut comprendre comment ils en viennent à saisir les relations quantitatives de base qui sont communes aux nombres et aux autres quantités ainsi que les aspects du nombre qui les distinguent des autres types de quantités.

Contexte de la recherche

La recherche classique de Piaget sur le développement logicomathématique a porté sur la compréhension que les enfants ont des propriétés générales des quantités comme la sériation et la conservation des relations d'équivalence dans le cas de certaines formes de transformations.[16] Cependant, Piaget pensait que ce type de connaissances n'émergeait qu'avec l'acquisition de la pensée opérationnelle concrète vers l'âge de 5 à 7 ans. Plus tard, d'autres chercheurs[17] ont entrepris de démontrer que les enfants plus jeunes possèdent des connaissances numériques considérablement plus importantes que ce que Piaget pensait. De plus, la recherche contemporaine fournit des preuves de l'existence d'une large gamme d'habiletés numériques précoces.[18]

Questions clés pour la recherche

Selon une allégation influente mais controversée que l'on retrouve dans la littérature actuelle sur les habiletés numériques précoces, le cerveau est « câblé » pour les nombres.[19,20] Les données sur la discrimination numérique effectuée par les nourrissons humains et par les animaux corroborent souvent cette idée.[21] Les critiques des explications innéistes de la connaissance numérique (innéisme : doctrine philosophique selon laquelle le cerveau contient des idées et des connaissances dès la naissance) notent cependant l'omniprésence du changement développemental dans le raisonnement numérique,[22] la lenteur de la différenciation des nombres par rapport aux autres dimensions quantitatives[23] et la nature contextualisée des connaissances numériques précoces.[24] De plus, les données accumulées indiquent que la langue[24] et les autres pratiques et produits culturels[25,26] contribuent énormément à l'acquisition des connaissances numériques chez les jeunes enfants.

Récents résultats de recherche

La connaissance numérique pendant la prime enfance

Un des domaines les plus actifs de la recherche actuelle est celui des habiletés numériques des nourrissons. Kobayashi, Hiraki et Hasegawa[1] ont utilisé les écarts entre l'information visuelle et auditive concernant le nombre d'éléments dans un ensemble pour vérifier la discrimination numérique chez les enfants de six mois. Ils leur ont montré des objets qui faisaient un son lorsqu'on les laissait tomber sur une surface, puis en ont laissé tomber deux ou trois derrière un écran de façon à ce que les nourrissons entendent le son de chaque objet sans toutefois les voir.

Ensuite, ils ont enlevé l'écran pour révéler soit le nombre exact d'objets, soit le nombre différent (trois s'il y avait eu deux sons et vice versa). Les nourrissons regardaient les éléments plus longuement quand le nombre d'éléments révélés ne correspondait pas au nombre de sons que lorsque les deux correspondaient, ce qui indique qu'ils étaient capables de faire la différence entre deux et trois objets. D'autres recherches indiquent que les nourrissons de six mois peuvent aussi différencier des quantités numériques plus importantes pourvu que le ratio qui les sépare soit large. Les nourrissons de six mois font la différence entre 4 et 8,[27] et même entre 16 et 32.[28] Lorsque l'écart est moins grand (par exemple, 8 par rapport à 12), ils ne réussissent pas à le percevoir,[29] mais les enfants plus âgés y parviennent.[2] Ainsi, les nourrissons deviennent capables de faire des discriminations numériques plus précises au fur et à mesure qu'ils vieillissent.

La connaissance des relations numériques chez les jeunes enfants

Parce que les nombres représentent un type de grandeur, l'aspect fondamental des connaissances numériques se rapporte aux relations d'égalité, d'infériorité et de supériorité entre les quantités numériques.[30] Il est quelque peu surprenant qu'à la lumière des résultats concernant la prime enfance, la comparaison numérique des séries soit une performance développementale significative pour les enfants d'âge préscolaire, surtout lorsque cela suppose d'ignorer les autres différences entre les séries.

Par exemple, Mix[31] a étudié la capacité des enfants de trois ans d'apparier numériquement une série de 2, 3 ou 4 points noirs. La tâche était facile à accomplir lorsque les objets à manipuler donnés aux enfants étaient semblables sur le plan perceptuel aux points qu'ils devaient apparier (p. ex., des disques noirs ou des coquillages rouges dont la taille était à peu près la même que celle des points). Cependant, la performance des enfants déclinait lorsque les objets contrastaient sur le plan perceptuel avec les points (p. ex., des figurines représentant des lions ou des objets hétérogènes).

Muldoon, Lewis et Francis[7] ont vérifié la capacité d'enfants de 4 ans à évaluer la relation numérique entre deux rangées de blocs (contenant 6 à 9 éléments par rangée) en les plaçant devant des indices trompeurs quant à la longueur de la rangée, c'est-à-dire que deux rangées de longueurs inégales contenaient le même nombre d'éléments, ou que deux rangées de longueurs égales contenaient différents nombres d'éléments. La plupart des enfants se sont basés sur la comparaison de la longueur plutôt que sur le calcul des éléments pour comparer les rangées. Cependant, une procédure consistant à offrir trois séances de formation a conduit à une meilleure performance, surtout chez les enfants à qui on avait demandé d’expliquer pourquoi les rangées étaient en fait numériquement égales ou inégales pendant la formation (tel qu’indiqué par l’expérimentateur).

Les lacunes de la recherche

Bien que les données expérimentales sur la numératie précoce s’accumulent rapidement, l’absence d’explications théoriques intégrant toute la gamme de résultats empiriques limite notre compréhension de la cohérence des divers résultats déjà obtenus et des problèmes qui restent à résoudre. Par exemple, dans la littérature sur la prime enfance, les explications contradictoires des capacités numériques précoces ont généré beaucoup de recherches au cours des dernières années, pourtant, les résultats n’ont pas eu pour effet de diminuer la controverse théorique. Lorsqu’ils présentent des conclusions théoriques, les chercheurs doivent connaître l’ensemble du corpus de résultats et formuler leurs théories avec suffisamment de précision pour que l’on puisse les différencier empiriquement.

De plus, les chercheurs doivent rassembler une information de meilleure qualité sur les processus qui ont permis d’améliorer les connaissances de la numératie chez les jeunes enfants. Nous savons que les variables contextuelles allant de la culture et de la classe sociale[32] aux modèles d’interaction parent-enfant[33,34] et enseignant-enfant[35] ont des répercussions sur la performance des jeunes enfants. Cependant, jusqu’à présent, nous n’avons que des bribes d’information provenant principalement d’études de formation expérimentales [,25,36]qui expliquent comment les expériences particulières peuvent altérer le raisonnement numérique des enfants. La recherche comportant des données convergentes sur : a) les expériences numériques quotidiennes des jeunes enfants et sur la variation de ces expériences en fonction de l’âge de l’enfant, et b) les effets expérimentaux de ces types d’expérience sur la réflexion des enfants serait particulièrement utile.

Conclusions

La recherche disponible sur le développement des connaissances des jeunes enfants concernant les nombres soutient quatre généralisations qui ont d’importantes conséquences pour la politique et la pratique. Premièrement, le développement numérique comporte de multiples facettes. La numératie pendant la petite enfance englobe bien plus que le calcul et la connaissance de certains faits arithmétiques élémentaires. Deuxièmement, malgré les habiletés numériques démontrées même par les nourrissons, le changement lié à l’âge est omniprésent. Dans les comparaisons entre les groupes d’âge, les enfants plus âgés obtiennent presque toujours de meilleurs résultats que les autres. Troisièmement, la variabilité est omniprésente. La performance de chaque enfant varie lorsqu’il effectue différentes tâches numériques,[37] lorsqu’il participe à des types particuliers de raisonnement numérique dans différents contextes[3] et même lorsqu’il reçoit de la rétroaction pour chaque réponse quand il effectue une seule tâche.[5,38] Enfin, les progrès des enfants dans l’acquisition de connaissances numériques sont très influençables. Les activités non structurées comme les jeux de société,[25] les activités expérimentales visant à mettre en lumière les relations numériques[7,36] et les variations inhérentes aux façons dont les parents[33,34] et les enseignants[35] parlent des chiffres aux enfants influencent ces progrès.

Implications

La recherche sur la numératie pendant la petite enfance peut considérablement contribuer aux politiques et à la pratique en documentant les objectifs déterminés pour l’instruction des mathématiques chez les jeunes enfants. Comme le développement numérique comporte de multiples facettes, les programmes d’enseignement devraient s’efforcer de viser plus large et ne pas se contenter d’améliorer les compétences des enfants en calcul ou de leur enseigner certains faits arithmétiques de base. Les nombres, comme les autres ordres de grandeur, sont caractérisés par des relations d’égalité et d’inégalité. En même temps, ils sont différents des autres types de grandeur parce qu’ils se basent sur la division d’une quantité globale en unités. Les activités pédagogiques qui encouragent les enfants à réfléchir aux relations entre les quantités et aux effets des transformations comme la division, le groupement ou la réorganisation de ces relations peuvent les aider à mieux comprendre ces notions. La variabilité et la malléabilité de la réflexion numérique des jeunes enfants indiquent que les programmes d’enseignement peuvent énormément contribuer à leurs connaissances croissantes des nombres.

Références

1. Kobayashi T, Hiraki K, Hasegawa T. Auditory-visual intermodal matching of small numerosities in 6-month-old infants. *Developmental Science* 2005;8(5):409-419.
2. Xu F, Arriaga RI. Number discrimination in 10-month-olds. *British Journal of Developmental Psychology* 1985;3(1):47-55.
3. Mix KS. How Spencer made number: First uses of the number words. *Journal of Experimental Child Psychology 2009;102(4):427-444*.
4. Sarnecka BW, Lee MD. Levels of number knowledge in early childhood. *Journal of Experimental Child Psychology* 2009;103(3):325-337.
5. Chetland E, Fluck M. Children’s performance on the ‘give-x’ task: A microgenetic analysis of ‘counting’ and ‘grabbing’ behaviour. *Infant and Child Development* 2005;14(2):133-154.

6. Le Corre M, Carey S. One, two, three, four, nothing more: an investigation of the conceptual sources of the verbal counting principles. *Cognition* 2007:105(2):395-438.
7. Muldoon K, Lewis C, Francis B. Using cardinality to compare quantities: The role of social-cognitive conflict in the development of basic arithmetical skills. *Developmental Science* 2007;10(5):694-711.
8. Canobi KH, Bethune NE. Number words in young children's conceptual and procedural knowledge of addition, subtraction and inversion. *Cognition* 2008;108(3):675-686.
9. Sherman J, Bisanz J. Evidence for use of mathematical inversion by three-year-old children. *Journal of Cognition and Development* 2007;8(3):333-344.
10. Clements DH, Sarama J, DiBiase AM, eds. *Engaging young children in mathematics: Standards for early childhood mathematics education*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates; 2005.
11. Clements DH, Sarama J. Experimental evaluation of the effects of a research-based preschool mathematics curriculum. *American Educational Research Journal* 1993;30(1):95-122.
12. Griffin S, Case R. Re-thinking the primary school math curriculum: An approach based on cognitive science. *Issues in Education* 1997;3(1):1--49.
13. Starkey P, Klein A, Wakeley A. Enhancing young children's mathematical knowledge through a pre-kindergarten mathematics intervention. *Early Childhood Research Quarterly* 1998;13(4):637-658.
14. National Mathematics Advisory Panel. *Foundations for success: The final report of the National Mathematics Advisory Panel*. Washington, DC.: U. S. Department of Education; 2008.
15. Duncan GJ, Dowsett CJ, Claessens A, Magnuson K, Huston AC, Klebanov P, Pagani LS, Feinstein L, Engel M, Brooks-Gunn J, Sexton H, Duckworth K, Japel C. School readiness and later achievement. *Developmental Psychology*. 2007;43(6):1428 - 1446.
16. Piaget J. *The child's conception of number*. Gattegno C, Hodgson FM, trans. New York, NY: Norton; 1952.
17. Gelman R, Gallistel CR. *The child's understanding of number*. Cambridge, MA; Harvard University Press; 2005.
18. Geary DC. Development of mathematical understanding. In: Damon W, ed. *Handbook of child psychology*. 6th ed. New York, NY: John Wiley & Sons; 2006:777-810. Khun D, Siegler RS Siegler, eds. *Cognition, perception, and language*. Vol. 2.
19. Butterworth B. *The mathematical brain*. New York, NY: Macmillan; 1999.
20. Dehaene S. *The number sense: How the mind creates mathematics*. Oxford, UK: Oxford University Press; 1997
21. Feigenson L, Dehaene S, Spelke E. Core systems of number. *Trends in Cognitive Sciences 2002;6(6):248-254*.
22. Sophian C. Beyond competence: The significance of performance for conceptual development. *Cognitive Development* 1997;12(3):281-303.
23. Sophian C. *The origins of mathematical knowledge in childhood*. New York, NY: Lawrence Erlbaum Associates; 2007.
24. Mix KS, Sandhofer CM, Baroody AJ. Number words and number concepts: The interplay of verbal and nonverbal quantification in early childhood. In: RV Kail, ed. *Advances in child development and behavior. vol. 33*. New York, NY: Academic Press; 2005:305-346.
25. Ramani GB, Siegler RS. Promoting broad and stable improvements in low-income children's numerical knowledge through playing number board games. *Child Development* 2008;79(2):375-394.
26. Schliemann AD, Carraher DW. The evolution of mathematical reasoning: Everyday versus idealized understandings. *Developmental Review* 1991;11(3):271-287.
27. Xu F. Numerosity discrimination in infants: Evidence for two systems of representation. *Cognition* 2003;89(1):B15-B25
28. Xu F, Spelke ES, Goddard S. Number sense in human infants. *Developmental Science* 2005;8(1):88-101.

29. Xu F, Spelke ES. Large-number discrimination in 6-month-old infants. *Cognition* 2000;74(1):B1-B11.
30. Davydov VV. Logical and psychological problems of elementary mathematics as an academic subject. In: Kilpatrick J, Wirszup I, Begle EG, Wilson JW, eds. *Soviet studies in the psychology of learning and teaching mathematics*.Chicago, Ill: University of Chicago Press; 1990:281-307. Steffe LP, ed. *Children's capacity for learning mathematics.* Vol. 7.
31. Mix KS. Surface similarity and label knowledge impact early numerical comparisons. *British Journal of Developmental Psychology* 1985;3(1):47-55
32. Starkey P, Klein A. Sociocultural influences on young children's mathematical knowledge. In: Saracho ON, Spodek B, eds. *Contemporary perspectives on mathematics in early childhood education*. Charlotte, NC: IAP/Information Age Pub.; 2008:253-276.
33. Blevins-Knabe B, Musun-Miller L. Number use at home by children and their parents and its relationship to early mathematical performance. *Early Development and Parenting* 1996;5:173-183.
34. Lefevre J, Clarke T, Stringer AP. Influences of language and parental involvement on the development of counting skills: Comparisons of French- and English-speaking Canadian children. *Early Child Development and Care* 2002;172(5):451-462.
35. Klibanoff RS, Levine SC, Huttenlocher J, Vasilyeva M, Hedges LV. Preschool children's mathematical knowledge: The effect of teacher "math talk." *Developmental Psychology* 1984;20(5):797-806.
36. Sophian C, Garyantes D, Chang C. When three is less than two: Early developments in children's understanding of fractional quantities. *Developmental Psychology* 1984;20(5):797-806
37. Dowker A. Individual differences in numerical abilities in preschoolers. *Developmental Science* 2008;11(5):650-654.
38. Siegler RS. How does change occur: A microgenetic study of number conservation. *Cognitive Psychology* 2002;45:337-374.

Prédicteurs de réussite et de difficultés d'apprentissage en mathématiques chez le jeune enfant

[1]Nancy C. Jordan, Ph.D., [2]Brianna L. Devlin, Ph.D.

[1]University of Delaware, États-Unis, [2]University of Oregon, États-Unis

Décembre 2023, Éd. rév.

Introduction

Les difficultés en mathématiques sont courantes. Jusqu'à 10 % des élèves reçoivent pendant leurs années d'école un diagnostic de trouble d'apprentissage en mathématiques.[1,2] Encore plus d'élèves éprouvent de grandes difficultés avec les mathématiques sans toutefois obtenir un tel diagnostic officiel. Les difficultés en mathématiques sont persistantes, et ceux qui en éprouvent ne pourront peut-être jamais rattraper leurs pairs qui réussissent normalement sans intervention.

Sujet

Les fondements de la réussite en mathématiques s'établissent avant même l'entrée au primaire.[3,4] La détermination des principaux facteurs permettant de prédire si un enfant aura ou non des difficultés dans cette matière facilite le dépistage, l'intervention et le suivi de ses progrès avant qu'un retard scolaire trop prononcé ne s'installe.

Problème

Les difficultés en mathématiques ont de lourdes conséquences pour le fonctionnement au quotidien, le rendement scolaire et l'avancement professionnel.[5] Il faut réussir en mathématiques pour étudier ou travailler dans le domaine des sciences, de la technologie, de l'ingénierie et des mathématiques.[6] En ce qui concerne la réussite en mathématiques, il existe des écarts de groupe importants liés au statut socioéconomique,[7] ainsi que des écarts individuels sur le plan de l'aptitude générale à apprendre.[8] Ces disparités existent dès la petite enfance et s'accentuent au cours de la scolarité.

Contexte de la recherche

Des études longitudinales sur les caractéristiques des enfants éprouvant des difficultés en mathématiques ont permis de cibler d'importants objectifs d'intervention. La plupart des enfants entrent à l'école avec un *sens des nombres* approprié pour l'apprentissage scolaire des mathématiques. Les composants préverbaux des nombres (par exemple, percevoir les représentations exactes de petits ensembles d'objets et les représentations approximatives d'ensembles plus importants) se développent en très bas âge.[9,10,11,12] Ces prémisses primaires sous-tendent, croit-on, l'acquisition des compétences conventionnelles en mathématiques, mais elles ne sont pas suffisantes. La plupart des enfants ayant des difficultés en mathématiques présentent des faiblesses sur le sens des nombres lié à la connaissance des nombres, les relations entre les nombres et les opérations sur les nombres,[4,13] des éléments du sens des nombres qui sont malléables et dont la compréhension est influencée par l'expérience.[14] Le sens des nombres désigne la connaissance des concepts de numération et de comptage oraux et écrits, tels que la correspondance biunivoque et la cardinalité. Les relations entre les nombres impliquent la compréhension des grandeurs numériques sur la ligne de nombres. Les opérations sur les nombres portent sur la transformation des quantités par addition et soustraction.[4,15]

Questions clés pour la recherche

Les compétences précoces qui sont alignées sur les mathématiques qu'il faudra maîtriser à l'école sont les meilleurs prédicteurs de la réussite ou de la difficulté future dans cette matière.[16] Les outils d'évaluation et les interventions doivent être ajustés pour aider les enfants à développer les concepts clés du sens des nombres. Pour créer des interventions destinées aux enfants qui risquent de développer des difficultés d'apprentissage des mathématiques à l'école, il est nécessaire d'identifier des voies et des facteurs liés au développement du sens des nombres.

Résultats d'études récentes

Le sens des nombres dès le plus jeune âge détermine les trajectoires de réussite des enfants en mathématiques.[16,17,18,19,20] Un sens des nombres peu développé est à l'origine des difficultés et des faiblesses en mathématiques.[21,22,23] Les enfants souffrant de dyscalculie développementale, une forme grave de déficience en mathématiques, se caractérisent par une difficulté à compter et à énumérer des séries d'objets ainsi qu'à reconnaître et à comparer des nombres.[21] Ces difficultés se traduisent par une mauvaise maîtrise de l'arithmétique, une compétence essentielle au niveau primaire.

Le sens des nombres comme facteur prédictif des résultats et difficultés en mathématiques

Des études fournissent des preuves empiriques de l'existence d'un modèle multifactoriel de perception précoce des nombres comprenant des éléments précis de compréhension des nombres, des relations entre les nombres et des opérations sur les nombres.[24,25] Les outils d'analyse précoce basés sur ce modèle permettent d'identifier avec précision les enfants susceptibles de présenter des difficultés ou des troubles d'apprentissage en mathématiques.[26,27,28] Les relations prédictives peuvent varier en fonction du niveau du sens des nombres à l'âge préscolaire. Les compétences concernant le sens des nombres permettent de prédire les résultats des enfants de niveau faible et moyen uniquement. Les compétences concernant les relations entre les nombres permettent de prédire les résultats des enfants de tous les niveaux. Les compétences concernant les opérations sur les nombres permettent de prédire les résultats des enfants de niveau moyen et élevé, mais pas de niveau faible.[29]

Les enfants de familles à faible revenu entrent à la maternelle avec un retard important par rapport à ceux qui viennent de familles à revenu moyen sur la plupart des indicateurs symboliques de numératie, et cet écart ne s’amenuise pas au cours de l’année scolaire.[13] Des études longitudinales réalisées à divers moments précis entre le début de la maternelle et la fin de la troisième année permettent de croire que le sens des nombres en bas âge constitue un fondement qui soutient l’apprentissage de notions de mathématiques complexes associées au calcul ainsi qu’à la résolution de problèmes et la fluidité.[16,20,30,31] L’acquisition du sens des nombres à l’école maternelle atténue la faiblesse en mathématiques chez les élèves à risque issus de familles à faible revenu. Comme la plupart des enfants peuvent arriver à acquérir des compétences numériques assez tôt,[4] les effets intermédiaires d’une telle acquisition fournissent des pistes claires pour orienter l’intervention précoce.

Type de représentation des quantités et taille des ensembles

La taille d’une quantité ou d’un ensemble, ainsi que la manière dont ils sont présentés à l’enfant (par exemple, de manière non symbolique ou symbolique) influencent le raisonnement des enfants sur les nombres. La capacité des enfants à associer les chiffres écrits aux quantités qu’ils représentent est essentielle à l’acquisition de compétences plus complexes concernant les sens des nombre.[32] Les représentations non symboliques des quantités (par exemple, définir lequel des deux ensembles de points est le plus grand, sans compter) favorisent le développement de la compréhension symbolique (lequel des deux chiffres est le plus grand), mais uniquement pour les petits ensembles (c’est-à-dire 4 ou moins).[33] Les résultats suggèrent que les enfants peuvent être en mesure d’effectuer des activités symboliques et non symboliques relatives au sens des nombres et portant sur des petits ensembles, dans tous les domaines (nombres, relations entre les nombres et opérations sur les nombres). Une intervention en particulier a porté ses fruits auprès d’enfants de maternelle à risque de développer des difficultés d’apprentissage en mathématiques. Celle-ci portait sur plusieurs compétences liées au sens des nombres avec des ensembles de petite taille, puis à des séquences similaires avec des ensembles de plus grande taille.[34]

Voies de développement

Des recherches ont révélé des différences individuelles concernant le développement du sens des nombres chez les enfants en bas âge. Il existe des voies de développement empiriquement distinctes concernant les nombres, les relations entre les nombres et les opérations sur les nombres chez les enfants d’âge préscolaire tout au long de l’année scolaire,[35,36] qui permettent de prédire les résultats en mathématiques en première et troisième année.[35] Des niveaux faibles de vocabulaire passif[35,36] et de mémoire de travail visuo-spatiale[34] permettent de prédire un développement systématiquement faible. Ceci souligne l’importance des compétences d’apprentissage générales pour le développement de la numératie chez les jeunes enfants.[37] Des facteurs contextuels, tels que l’environnement d’apprentissage à la maison, sont également liés aux différences individuelles dans le développement de la numératie chez les jeunes enfants.[38]

Lacunes de la recherche

Des recherches supplémentaires sont nécessaires pour examiner la manière dont le sens des nombres, les relations entre les nombres et les opérations sur les nombres fonctionnent ensemble au stade de la petite enfance. Il serait également utile de se pencher sur la manière dont la taille des ensembles et le niveau de représentation limitent le développement du sens des nombres, y compris chez les enfants susceptibles de présenter des difficultés d’apprentissage des mathématiques. Les interventions qui ciblent et combinent les différents aspects du sens des nombres pour les enfants ayant ou risquant de rencontrer des difficultés d’apprentissage en mathématiques devraient être développées et évaluées au moyen d’études sur échantillon aléatoire.

Conclusions

Les difficultés en mathématiques se répercutent sur toutes les activités courantes et peuvent entraîner des conséquences tout au long de la vie. Les compétences de base en sens des nombres s’acquièrent pendant la petite enfance et permettent très bien de prédire la réussite et les difficultés futures en mathématiques. Le développement du sens des nombres dépend du niveau de représentation et de la taille des ensembles. Les recherches suggèrent que le sens des nombres devrait être développé en priorité au niveau préscolaire et à l’école maternelle afin de fournir une base pour l’apprentissage de l’arithmétique formelle et le développement de la fluidité. Dans l’ensemble, le sens des nombres dès le plus jeune âge est crucial pour l’établissement d’une trajectoire de réussite en mathématiques tout au long du primaire.

Implications pour les parents, les services et les politiques

Dans l’éducation contemporaine, les difficultés d’apprentissage des mathématiques peuvent passer inaperçues jusqu’à la quatrième année d’études. Les interventions précoces sont moins courantes pour les mathématiques que pour la lecture, bien que les programmes d’analyse et d’intervention précoce à plusieurs niveaux se développent au fur et à mesure qu’avance la recherche. Les établissements préscolaires et les maternelles devraient intégrer des expériences mathématiques qui mettent l’accent sur l’enseignement des nombres, des relations entre les nombres et des opérations sur les nombres. La taille des ensembles et le type de représentation doivent graduellement évoluer au fil des programmes.[4,34] Il est essentiel que les préparateurs de programmes d'éducation de la petite enfance se concentrent sur les aspects fondamentaux du sens des nombres. Ainsi, des interventions précoces permettront à tous les enfants d’acquérir les bases nécessaires pour réussir en mathématiques.

Références

1. Barbaresi MJ, Katusic SK, Colligan RC, Weaver AL, Jacobsen SJ. Math learning disorder: Incidence in a population-based birth cohort, 1976-1982, Rochester, Minn. *Ambulatory Pediatrics* 2005;5(5):281-289.

2. Reigosa-Crespo V, Valdés-Sosa M, Butterworth B, Estévez N, Rodríguez M, Santos E, Torres P, Suárez R, & Lage A. Basic numerical capacities and prevalence of developmental dyscalculia: the Havana Survey. *Developmental Psychology* 2012;48(1):123-135.

3. Clements DH, Sarama J. Early childhood mathematics learning. In: Lester JFK, ed. *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*. New York, NY: Information Age Publishing; 2007:461-555.

4. Cross CT, Woods TA, Schweingruber H, National Research Council, Committee on Early Childhood Mathematics, eds. *Mathematics learning in early childhood: Paths toward excellence and equity*. Washington, DC: National Academies Press; 2009.

5. Sadler PM, Tai RH. The two high-school pillars supporting college science. *Science* 2007;317(5837):457-458.

6. National Mathematics Advisory Panel (NMAP). Foundations for success: The final report of the National Mathematics Advisory Panel. Washington, DC: U.S. Department of Education; 2008.

7. Broer M, Bai Y, Fonseca F. A review of the literature on socioeconomic status and educational achievement. In: *Socioeconomic inequality and educational outcomes: Evidence from twenty years of TIMSS. IEA Research for Education, Vol. 5*. Cham: Springer; 2019:7-17.

8. Geary DC, Hoard MK, Byrd-Craven J, Nugent L, Numtee C. Cognitive mechanisms underlying achievement deficits in children with mathematical learning disability. *Child Development* 2007;78(4):1343-1359.

9. Berch DB. Making sense of number sense: Implications for children with mathematical disabilities. *Journal of Learning Disabilities* 2005;38(4):333-339.

10. Dehaene S. *The number sense: How the mind creates mathematics.* New York, NY: Oxford University Press; 1997.

11. Feigenson L, Dehaene S, Spelke E. Core systems of number. *TRENDS in Cognitive Sciences* 2004;8(7):307-314.

12. Buijsman S. The representations of the approximate number system. *Philosophical Psychology* 2021;34(2):300-317.

13. Jordan NC, Levine SC. Socioeconomic variation, number competence, and mathematics learning difficulties in young children. *Developmental Disabilities Research Reviews* 2009;15:60-68.

14. Case R, Griffin S. Child cognitive development: The role of central conceptual structures in the development of scientific and social thought. In: Hauert EA, ed. *Developmental psychology: Cognitive, perceptuo-motor, and neurological perspectives*. North-Holland: Elsevier; 1990:193-230.

15. Jordan NC, Devlin BL, Botello M. Core foundations of early mathematics: refining the number sense framework. *Current Opinion in Behavioral Sciences* 2022;46:101181.

16. Jordan NC, Glutting J, Ramineni C. The importance of number sense to mathematics achievement in first and third grades. *Learning and Individual Differences* 2010;20(2):82-88.

17. Duncan GJ, Dowsett CJ, Classens A, Magnuson K, Huston AC, Klebanov P, Pagani LS, Feinstein L, Engel M, Brooks-Gunn J, Sexton H, Duckworth K, Japel C. School readiness and later achievement. *Developmental Psychology* 2007;43(6):1428-1446.

18. Watts TW, Duncan GJ, Siegler RS, Davis-Kean PE. What’s past is prologue: Relations between early mathematics knowledge and high school achievement. *Educational Researcher* 2014; 43(7):352-360.

19. Rittle-Johnson B, Fyfe ER, Hofer KG & Farran DC. Early math trajectories: Low-income children's mathematics knowledge from ages 4 to 11. *Child Development* 2017; 88(5):1727-1742.

20. Jordan NC, Kaplan D, Ramineni C, Locuniak MN. Early Math Matters: Kindergarten Number Competence and Later Mathematics Outcomes. *Developmental Psychology* 2009;3(45):850-867.

21. Landerl K, Bevan A, Butterworth B. Developmental dyscalculia and basic numerical capacities: A study of 8– 9-year-old students. *Cognition* 2004;93(2):99-125.

22. Peters, L, de Beeck HO, De Smedt B. Cognitive correlates of dyslexia, dyscalculia and comorbid dyslexia/dyscalculia: Effects of numerical magnitude processing and phonological processing. *Research in Developmental Disabilities* 2020;107:103806.

23. Mazzocco MM, Thompson RE. Kindergarten predictors of math learning disability. *Learning Disabilities Research and Practice* 2005;20(3):142-155.

24. Purpura DJ, Lonigan CJ. Informal numeracy skills: The structure and relations among numbering, relations, and arithmetic operations in preschool. *American Educational Research Journal* 2013; 50(1):178-209.

25. Milburn TF, Lonigan CJ, DeFlorio L, Klein A. Dimensionality of preschoolers' informal mathematical abilities. *Early Childhood Research Quarterly* 2019;47:487-495.

26. Clarke B, Shinn MR. A preliminary investigation into the identification and development of early mathematics curriculum-based measurement. *School Psychology Review* 2004;33(2):234-248.

27. Purpura DJ, Lonigan CJ. Early numeracy assessment: The development of the preschool early numeracy scales. *Early Education and Development* 2015;26(2):286-313.

28. Jordan NC, Klein A, Huang CH. Screener for Early Number Sense. Hammill Institute on Disabilities. (forthcoming).

29. Devlin BL, Jordan NC, Klein A. Predicting mathematics achievement from subdomains of early number competence: Differences by grade and achievement level. *Journal of Experimental Child Psychology* 2022;217:105354.

30. Jordan NC, Kaplan D, Locuniak MN, Ramineni C. Predicting first-grade math achievement from developmental number sense trajectories. *Learning Disabilities Research & Practice* 2007;22(1):36-46.

31. Locuniak MN, Jordan NC. Using kindergarten number sense to predict calculation fluency in second grade. *Journal of Learning Disabilities* 2008;41(5):451-459.

32. Jiminez-Lira CJ, Carver M, Douglas H, LeFevre JA. The integration of symbolic and non-symbolic representations of exact quantity in preschool children. *Cognition* 2017;166:382-397.

33. Hutchison JE, Ansari D, Zheng S, De Jesus S, Lyons IM. The relation between subitizable symbolic and non-symbolic number processing over the kindergarten school year. *Developmental Science* 2020; 23(2):e12884.

34. Dyson N, Jordan NC, Beliakoff A, Hassinger-Das B. A kindergarten number-sense intervention with contrasting practice conditions for low-achieving children. *Journal for Research in Mathematics Education* 2015;46(3):331-370.

35. Bakker M, Torbeyns J, Verschaffel L, De Smedt B. Longitudinal pathways of numerical abilities in preschool: Cognitive and environmental correlates and relation to primary school mathematics achievement. *Developmental Psychology* 2023;59(3):442.

36. Cahoon A, Gilmore C, Simms V. Developmental pathways of early numerical skills during the preschool to school transition. *Learning and Instruction* 2021;75:101484.

37. LeFevre J, Fast L, Skwarchuk SL, Smith-Chant BL, Bisanz J, Kamawar D, Penner-Wilger M. Pathways to mathematics: Longitudinal predictors of performance. *Child Development* 2010 Nov-Dec;81(6):1753-1767.

38. Silver AM, Libertus ME. Environmental influences on mathematics performance in early childhood. *Nature Review Psychology* 2022;1(7):407-418.

Numératie chez le jeune enfant : transition des premiers mois aux premières années de vie

Kelly S. Mix, Ph.D.

University of Maryland, États-Unis

Décembre 2023, Éd. rév.

Introduction

Dès l'âge préscolaire, la plupart des enfants montrent un éventail de compétences en calcul, y compris des aptitudes verbales, comme le comptage, et des compétences non verbales telles que la reconnaissance de l'équivalence d'ensembles d'objets.[1,2,3,4,5] Bien que les chercheurs conviennent de l'existence de ces capacités dès la petite enfance, ils ne s'entendent pas encore sur le moment où celles ci se manifestent ni sur les mécanismes qui les sous tendent. Autrement dit, quelles sont les origines des compétences numériques verbales et non verbales chez le jeune enfant?

Sujet

Jusqu'à récemment, les recherches sur la numératie portaient principalement sur le comptage verbal. Or, l'idée selon laquelle la numératie pourrait se manifester chez le nourrisson et le très jeune enfant a amené les chercheurs à prêter davantage attention aux concepts qui peuvent être mesurés de manière non verbale. Ce changement de cap a élargi l'éventail des comportements considérés comme des manifestations de la numératie chez le jeune enfant, ce qui a eu une incidence directe sur l'évaluation et l'éducation des jeunes enfants. En outre, cette nouvelle perspective a soulevé des questions sur les origines des troubles d'apprentissage en mathématiques et les écarts dans les résultats en mathématiques.

Problèmes

La plupart des enfants acquièrent les compétences de base en matière de nombres symboliques avant l'âge de 5 ans, notamment en récitant les nombres jusqu'à 20 ou plus,[1,2,4] en utilisant l'énumération pour designer des ensembles,[1,2,4,5] en comprenant que le dernier mot du compte des éléments effectué représente la valeur de l'ensemble (principe du nombre cardinal),[1,2,5,6] en reconnaissant les chiffres écrits5 et en définissant l'ordinalité des nombres à un seul chiffre.[7] Il a également été démontré que les enfants peuvent interpréter des nombres à plusieurs chiffres à partir de l'âge de 3 ans, en jugeant correctement, par exemple, lequel de deux nombres à plusieurs chiffres est le plus grand.[8,9]

Avant de maîtriser les compétences symboliques, les enfants d'âge préscolaire comprennent également les relations quantitatives sur la base de mesures non verbales. Ils sont notamment capables de déterminer des ensembles d'objets équivalents,[10] d'effectuer des calculs simples avec des objets[11] ou d'indiquer lequel de deux nuages de points en compte le plus.[12] Les enfants effectuent des tâches liées aux nombres axées sur des objets avant de montrer une compréhension similaire au moyen de tâches faisant appel aux habiletés verbales. Par exemple, les enfants d'âge préscolaire résolvent de simples problèmes d'addition et de soustraction s'appliquant à des objets (p. ex., 2 + 2) des années avant de pouvoir résoudre des problèmes semblables exprimés en mots.[11,13] De même, les enfants déterminent le rang ou l'ordre et l'équivalence dans des tâches à choix forcé avant de pouvoir comparer les mêmes ensembles verbalement, en les comptant, les compétences non verbales apparaissant entre deux ans et demi et trois ans.[11,14,15]

L'un des principaux objectifs de la recherche a été de comprendre les origines développementales de ces conceptions non verbales des nombres. Il a été démontré grâce à des méthodes d'habituation et de regard préférentiel que les nourrissons sont également sensibles à la quantité [16,17] et certaines études ont même démontré cette sensibilité chez les nouveau-nés.[18,19] Diverses propositions ont établi un lien entre les variations individuelles de cette sensibilité précoce et les résultats futurs en matière de calcul et de mathématiques. Toutefois, des questions restent en suspens concernant les représentations qui sous-tendent cette sensibilité précoce, la manière dont les représentations elles-mêmes se développent et le rôle qu'elles peuvent jouer dans le développement ultérieur.

Contexte de la recherche

L'un des procédés à l'origine de représentation non verbale précoce des nombres est le système numérique approximatif, ou SNA. Il s'agit d'une représentation proposée pour sous-tendre la discrimination de différentes tailles d'ensembles, en particulier de grands ensembles (p. ex., 16 contre 32).[20,21] Bien que l'on pense que le SNA concerne des nombres discrets, cela est également inexact et dépend des rapports, comme les dimensions non numériques telles que la surface, ce qui signifie que les quantités sont plus faciles à distinguer lorsque leur rapport est plus élevé (p.

ex., 16 est plus facile à distinguer de 32 que de 24).[22] On considère que le SNA est inné, car même les nouveau-nés réagissent à des variations de taille d'ensembles, tant que les rapports sont suffisamment grands.[19] Toutefois, la recherche montre également que le SNA se précise avec l'âge et au fil de la scolarité.[23,24,25,26]

Une autre proposition de représentation non verbale des nombres est basée sur l'individuation des objets, également décrite comme le suivi des objets, les modèles mentaux ou le « subitizing », soit la perception immédiate des unités (p. ex., 1 à 4 objets).[11,21,27,28] Selon ces explications, les enfants représentent incidemment le nombre lorsqu'ils différencient les objets dans une scène et suivent les mouvements et les positions spatiales des objets. Les limites de taille concernant l'individuation des objets peuvent s'expliquer par des contraintes relatives à la mémoire de travail [29] ou l'attention.[27] Certains chercheurs ont soutenu que, comme le SNA, les représentations basées sur les objets sont innées, le débat se poursuivant sur la question de savoir si les deux systèmes sont distincts,[11,30] ou simplement des démonstrations différentes d'un même système de représentation primitif du point de vue de l'évolution.[31] D'autres encore ont suggéré que les représentations basées sur les objets pourraient émerger d'expériences d'observation et de manipulation d'objets sans nécessairement découler d'un système de quantification inné.[32]

Un troisième facteur contribuant à l'apprentissage précoce de la numératie est l'exposition aux mots-nombres et au système de comptage verbal. Avant la recherche sur la quantification chez le nourrisson, les recherches fondamentales de Piaget suggéraient que les enfants n'avaient pas de compréhension conceptuelle des relations quantitatives jusqu'à ce qu'ils aient maîtrisé le comptage conventionnel,[33] et des études montraient que les enfants ne comprenaient pas les principes du calcul jusqu'à ce qu'ils aient maîtrisé les méthode de comptage.[34,35] Bien que des recherches ultérieures aient montré que les enfants qui ne savaient pas compter comprenaient beaucoup plus de choses sur les quantités que ce qu'affirmait Piaget, la compréhension des nombres symboliques reste un facteur prédictif important des résultats futurs en mathématiques.[36,37,38,39,40] Il s'agirait même d'un prédicteur plus fort que les compétences de quantification non verbales.[41,42,43,44] La recherche a également suggéré que les enfants peuvent extraire des informations sur les nombres et leur signification à partir des symboles numériques eux-mêmes, montrant par exemple que les enfants d'âge préscolaire peuvent faire correspondre des nombres écrits à plusieurs chiffres à des mots-nombres à plusieurs chiffres et comparer l'ordre de grandeur de nombres écrits à plusieurs chiffres, indépendamment des résultats obtenus à l'aide de mesures non verbales.[9]

Questions clés de la recherche

La plupart des chercheurs s’accordent à dire que les enfants réagissent aux changements de nombres dès le plus jeune âge par des processus non verbaux. En outre, les étapes de l’acquisition verbale des nombres font l’objet d’un consensus général. Les recherches actuelles se concentrent désormais sur la nature sous-jacente de la quantification non verbale et les chercheurs se demandent si la variation des processus non verbaux est liée aux résultats futurs en mathématiques. Dans le cadre de cette étude, les chercheurs travaillent également à déterminer si les enfants passent de la quantification verbale à la quantification non verbale au fur et à mesure de leur apprentissage.[45] Enfin, la recherche s’intéresse de plus en plus à l’environnement de la numératie verbale à la maison et à l’école maternelle, et à son lien avec les résultats futurs de l’enfant.

Résultats récents de la recherche

Discrimination précoce des nombres et dimensions quantitatives non numériques

Une question fait encore débat : les réactions des nourrissons aux changements quantitatifs sont-elles basées sur la conscience d’un nombre discret *proprement dit* ou sur l’une des nombreuses variables perceptives qui sont en corrélation avec un nombre discret, telles que la surface, l’enveloppe convexe, la luminosité, la durée, la densité temporelle et la fréquence spatiale?[46,47,48] Les chercheurs ont tenté de contrôler ces variables perceptives afin d’évaluer plus précisément la sensibilité numérique,[24,49,50] mais comme d’autres l’ont souligné,[46,47] il est difficile de contrôler toutes les variables simultanément. Certains chercheurs ont donc suggéré que les recherches futures devraient se concentrer sur les moyens de prendre en compte les réponses non numériques plutôt que d’essayer de les contrôler.[46,50,51] Il n’a donc pas encore été déterminé si la sensibilité quantitative des nourrissons est basée sur le nombre discret, comme certains l’ont affirmé, ou sur une combinaison d’autres informations perceptives qui sont en corrélation avec le nombre discret. Des questions similaires se posent dans les recherches visant à déterminer si les nourrissons réagissent aux changements de quantité entre les dimensions, par exemple en apprenant à associer certains modèles visuels à des ensembles numériques plus ou moins grands et en transférant cette association à des objets de taille différente,[52] ou en s’attendant à ce que si des paires quantitatives (p. ex., le nombre et l’étendue spatiale) augmentent ou diminuent, elles changent toutes deux dans la même direction.[18] Ces recherches ont conduit à la proposition selon laquelle la quantification découle d’une représentation généralisée de la magnitude. Cette représentation est une façon de caractériser un sens indifférencié de la quantité basé sur de multiples flux d'informations, mais l'affirmation selon laquelle les enfants peuvent passer d'un indice quantitatif à un autre nécessiterait des contrôles permettant d'isoler efficacement chaque indice.

Établir des connexions

La recherche a montré comment les enfants acquièrent plusieurs compétences distinctes en matière d'énumération verbale (p. ex., le comptage, la cardinalité, l'ordinalité), ainsi que la façon dont ils représentent les quantités de manière non verbale. Cependant, pour parvenir à une conception cohérente des nombres, les enfants doivent ultimement établir des liens entre ces compétences et ces représentations (p. ex., les mots numériques verbaux, les quantités physiques, les modèles mentaux).[43,53,54,55,56,57] Les mots associés aux petits chiffres peuvent jouer un rôle essentiel dans les premières représentations des enfants parce que les quantités 1, 2 et 3 peuvent être immédiatement perçues et représentées de manière non verbale avec moins d'erreurs que les représentations de quantités plus importantes. Ainsi, les petits ensembles peuvent offrir des référents perceptuels clairs qui peuvent être associés à un mot.[28,58,59,60]

Une fois que les mots faisant référence aux petits ensembles ont été appris, les enfants sont en mesure de remarquer que les mêmes mots sont utilisés pour nommer et pour compter, découvrant ainsi le principe cardinal (CWP, pour *Cardinal Word Principle*), c'est-à-dire l'idée que le dernier mot nombre prononcé désigne le cardinal de l'ensemble. En l'absence d'enseignement ciblé, la plupart des enfants maîtrisent naturellement le principe de cardinalité à l'âge de 4 ans, mais des études ont montré que le principe de cardinalité peut être induit par la pratique du nommage de petits ensembles ainsi que par un enseignement qui juxtapose le comptage et le nommage.[28,61] Dans le cadre de l'étude « reconnaître *n* », la connaissance du principe de cardinalité a été mesurée à l'aide de la tâche « donne-moi *n* » (p. ex., « Donne-moi 5 pions. »). Les premiers résultats de la recherche suggèrent que les enfants apprennent les correspondances entre les nombres et les quantités un par un et dans l'ordre, avant de faire le lien entre le comptage et la cardinalité, qui est lui-même suivi d'une généralisation logique rapide du principe de cardinalité à tous les nombres compris dans la plage de comptage de l'enfant.[45,62,5] Cependant, des études par journal de bord ont fait état d'une utilisation correcte des mots associés aux petits nombres dans certains contextes encore plus tôt, ainsi que de preuves que les enfants peuvent acquérir le sens des nombres dans un ordre différent.[63,64] En outre, des études récentes ont soulevé des questions sur la validité des performances dans le cadre de la tâche « donne-moi *n* » et sur la signification des classifications des connaissances de *n* basées sur ces performances.[65,66,67,68] Ainsi, bien que l'on ait beaucoup appris sur ces connexions importantes, des questions clés restent en suspens.

Facteurs prédictifs précoces des résultats en mathématiques

L'existence d'une sensibilité au quantitatif dans la petite enfance a incité les chercheurs à examiner le lien entre cette sensibilité et l'acquisition de la numératie verbale dans la petite enfance, et les résultats en mathématiques à l'école. Certains ont soutenu que le SNA fournit une base de représentation pour l'acquisition de compétences ultérieures en calcul symbolique et en mathématiques.[21,45] Par ailleurs, des études longitudinales établissant un lien entre l'acuité du SNA pendant la petite enfance et la période préscolaire et les réalisations ultérieures en mathématiques pendant l'enfance et l'adolescence semblent étayer cette affirmation.[69,70,71,72] Cependant, d'autres études examinant les associations longitudinales et simultanées n'ont pas réussi à trouver de preuves reliant l'acuité du SNA à la réussite en mathématiques[73,74,75,76,77] et d'ailleurs, des preuves de plus en plus nombreuses sur les plans neurologique et comportemental suggèrent qu'il existerait des mécanismes distincts.[12,26,78] Enfin, lorsque les enfants acquièrent des compétences en calcul symbolique, l'acuité du SNA s'améliore simultanément, peut-être en conséquence.[25,79] Ainsi, le SNA et les compétences en mathématiques symboliques auraient une relation de causalité, ce lien pourrait commencer avec le nombre symbolique pour aller vers le SNA plutôt que l'inverse, voire peut-être aller dans les deux sens.

Des tendances similaires ont été rapportées pour la focalisation spontanée sur les nombres (*spontaneous focusing on number* ou SFON), c'est-à-dire la tendance des enfants à remarquer les nombres exacts dans leurs expériences quotidiennes.[80] Les tests de focalisation spontanée sur les nombres sont élaborés de sorte à éviter les indices verbaux, pour exploiter l'attention autodirigée des enfants sur la numération, mais comme les enfants de ces études sont généralement d'âge préscolaire ou plus âgés,[80,81] nous ne savons pas si le mécanisme de focalisation spontanée sur les nombres se traduit par la quantification non verbale (p. ex., l'individuation des objets), le comptage verbal ou les deux à la fois. Des études corrélationnelles concomitantes indiquent de fortes associations entre les tendances de SFON et la numératie verbale,[80,82] et d'autres études longitudinales démontrent que la performance lors des tâches mesurant la focalisation spontanée sur les nombres dans la petite enfance est corrélée avec la connaissance des nombres symboliques à l'école primaire.[83,84] Cependant, alors que la SFON et la numératie symbolique prédisent toutes deux les résultats futurs en mathématiques, la performance sur les tâches liées aux nombres symboliques est le prédicteur le plus fiable.[85] En outre, les tentatives d'amélioration de la SFON se sont montrées efficaces lorsque les interventions comprenaient des activités liées aux nombres symboliques,[86,87] ce qui suggère que la focalisation spontanée sur les nombres peut être motivée par l'acquisition de la numératie symbolique, plutôt que l'inverse. Des recherches supplémentaires utilisant des interventions basées sur des activités non verbales sont nécessaires pour tirer des conclusions définitives, mais la numération symbolique précoce reste le prédicteur le plus clair et le plus fort des résultats futurs en mathématiques.

La numératie en milieu familial

L'acquisition des premières compétences en calcul des enfants a lieu en grande partie dans le foyer familial, c'est pourquoi les activités liées aux nombres des enfants et de leurs proches ont fait l'objet d'une attention croissante.[88,89] La plupart des recherches sur ce sujet ont utilisé soit le rapport des parents sur les activités liées aux nombres,[90,91,92,93,94] soit le codage du discours des parents à partir d'observations directes.[95,96,97] Les études ont démontré une association entre la fréquence des activités liées aux nombres à la maison, d'après les parents, et les résultats des enfants en matière de calcul,[90,91] bien que cette association n'ait pas toujours été possible.[89,92,93] Les études existantes indiquent également que même si les parents parlent rarement des nombres,[95] même lorsque les activités sont conçues pour susciter de telles discussions,[60,97] il existe des associations significatives entre la fréquence des discussions fortuites sur les nombres et les résultats des enfants en matière de numératie.[90,95,96,97,98] Les résultats des enfants ont également été liés à la variation des différences qualitatives, telles que la durée de la conversation,[99] et le fait de se concentrer sur des ensembles de grande taille (p. ex., 4 à 10) ou des concepts avancés tels que la cardinalité.[97,100,101] Quelques études d'observation portant sur la petite enfance ont démontré que le discours parental sur les nombres existe dès les plus jeunes âges observés à ce jour (c'est-à-dire entre 12 et 14 mois).[95,96] Ainsi, bien que les nourrissons soient eux-mêmes non verbaux, leur compréhension émergente de la numération peut être façonnée par une exposition précoce à la numération verbale.[32]

Lacunes de la recherche

Bien que la recherche ait apporté de nombreuses réponses sur les changements développementaux de diverses aptitudes quantitatives, telles que le principe cardinal, la SFON et les discriminations non verbales de la taille d'un ensemble, nous n'en savons pas suffisamment sur les mécanismes à l'origine de ces changements, et en particulier sur les mécanismes par lesquels les enfants établissent des liens entre divers concepts et représentations pour parvenir à une perception cohérente des nombres. Ainsi, des recherches supplémentaires sont nécessaires pour tester expérimentalement les mécanismes proposés et recueillir des données cohérentes avec les hypothèses relatives au mécanisme de développement. Par exemple, bien qu'il ait été avancé que les ensembles de petite taille offrent la possibilité d'unir la quantification verbale et non verbale, l'étape suivante consiste à le démontrer de manière expérimentale. Les études d'intervention pour tester les effets de différents types de facteurs externes peuvent également être utiles à cet égard. De même, il est nécessaire de poursuivre les recherches sur les relations entre les nombres verbaux et les nombres non verbaux afin de déterminer quelles sont les influences en jeu, à quel âge elles interviennent et dans quelles conditions.

Une autre question qui reste en suspens est celle de savoir si la quantification non verbale est basée sur des nombres discrets ou sur l'attention portée à des variables non numériques, telles que la surface. Bien que les chercheurs aient tenté de contrôler ces variables non numériques, une bonne alternative pourrait consister à concevoir des mesures qui tiennent compte des réponses non numériques plutôt que d'essayer de les contrôler.[46,50,51]

Enfin, de nouvelles recherches intéressantes sur la numératie en milieu familial et sur les origines des concepts de nombres à plusieurs chiffres ont soulevé un certain nombre de nouvelles questions qui méritent d'être étudiées. Par exemple, la plupart des études sur la numératie en milieu familial se sont concentrées sur le calcul à l'âge préscolaire, mais il serait très utile de s'intéresser aux expériences à la petite enfance, en particulier compte tenu des preuves de quantification non verbale qui existent depuis longtemps dans cette tranche d'âge. Les nourrissons s'intéressent-ils aux nombres beaucoup plus tôt dans leur vie que ce que nous avons observé jusqu'à présent? Si tel est le cas, comment cela pourrait-il modifier notre compréhension de la SFON, par exemple? De même, l'acquisition inattendue et précoce de la signification des nombres à plusieurs chiffres soulève de nouvelles questions sur la présence de la numération à plusieurs chiffres dans le discours des parents, ainsi que sur la question de savoir si la variation de ces connaissances informelles est liée aux résultats futurs en mathématiques. Des interventions ciblant soit la numératie en milieu familial, soit le calcul précoce à plusieurs chiffres, soit les deux, constitueraient de nouvelles orientations intéressantes pour la recherche future.

Conclusions

Les preuves des aptitudes du nourrisson en ce qui concerne les nombres soulèvent des questions intrigantes sur les origines de la numératie et les ressources conceptuelles auxquelles les jeunes enfants recourent pour apprendre le comptage verbal. Toutefois, d'autres recherches devront être effectuées pour révéler précisément ce qu'impliquent ces capacités du nourrisson et de quelle manière elles sont précisément liées au développement non verbal et verbal subséquent et si ces mécanismes peuvent être exploités pour aider tous les enfants à entrer à l'école avec une base solide de concepts de numératie.

Références

1. Gelman R, Gallistel CR. *The child's understanding of number.* Cambridge, MA: Harvard University Press; 1978.
2. Fuson KC. *Children's counting and concepts of number.* New York, NY: Springer-Verlag; 1988.
3. Mix KS, Huttenlocher J, Levine SC. *Quantitative development in infancy and early childhood.* New York, NY: Oxford University Press; 2002.
4. Clements DH, Sarama J. *Learning and teaching early math: The learning trajectories approach.* New York, NY: Routledge; 2009.
5. Litkowski EC, Duncan RL, Logan J AR, Purpura DL. When do preschoolers learn specific mathematics skills? Mapping the development of early numeracy knowledge. *Journal of Experimental Child Psychology.* 2020;195:104846.
6. Wynn K. Children's understanding of counting. *Cognition* 1990;36(2):155-193.
7. Ramani GB, Siegler RS Playing linear numerical board games promotes low-income children's numerical development. *Cognition* 2008;11(5):655-661.
8. Mix KS, Prather RW, Smith LB, Stockton JD. Young children's interpretation of multidigit number names: From emerging competence to mastery. *Child Development* 2014;85(3):1306-1319.
9. Yuan L, Prather RW, Mix KS, Smith LB. Preschoolers and multi-digit numbers: A path to mathematics through the symbols themselves. *Cognition* 2019;189:89-104.
10. Mix KS. Children's equivalence judgments: Crossmapping effects. *Cognitive Development* 2008;23(1):191-203.

11. Huttenlocher J, Jordan NC, Levine SC. A mental model for early arithmetic. *Journal of Experimental Psychology: General.* 1994;123(3):284-296.

12. Yuan L, Prather RW, Mix KS, Smith LB. Number representations drive number-line estimates. *Child Development*. 2020;91(4):e952-e967.

13. Rasmussen C, Bisanz J. Representation and working memory in early arithmetic. *Journal of Experimental Child Psychology* 2005;91:137-157.

14. Cantlon J, Fink R, Safford K, Brannon EM. Heterogeneity impairs numerical matching but not numerical ordering in preschool children. *Developmental Science* 2007;10:431-440.

15. Mix KS. Similarity and numerical equivalence: Appearances count. *Cognitive Development* 1999;14:269-297.

16. Lipton JS, Spelke ES. Origins of number sense: Large-number discrimination in human infants. *Psychological Science*, 2003;14(5):396-401.

17. Xu F. Numerosity discrimination in infants: Evidence for two systems of representations. *Cognition*, 2003;89(1):B15-B25.

18. de Hevia MD, Izard V, Coubart A, Spelke ES, Streri A. Representations of space, time, and number in neonates. *Proceedings of the National Academy of Sciences*. 2014;111(13):4809-4813.

19. Izard V, Sann C, Spelke ES, Streri A. Newborn infants perceive abstract numbers. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*. 2009;106(25):10382-10385.

20. Dehaene S. *The number sense: How the mind creates mathematics.* New York, NY: Oxford University Press; 1997.

21. Feigenson L, Dehaene S, Spelke ES. Core systems of number. *Trends in Cognitive Science* 2004;8(7):307-314.

22. Xu F, Spelke ES, Goodard S. Number sense in human infants. *Developmental Science* 2005;8(1):88-101.

23. Halberda J, Feigenson L. Developmental change in the acuity of the “number sense”: The approximate number system in 3-, 4-, 5-, and 6-year-olds and adults. *Developmental Psychology* 2008;44(5):1457-1465.

24. Piazza M, DeFeo V, Panzeri S, Dehaene S. Learning to focus on number. *Cognition* 2018;181:35-45.

25. Shusterman A, Slusser E, Halberda J, Odic D. Acquisition of the cardinal principle coincides with improvement in approximate number system acuity in preschoolers. *PLoS ONE* ;11(4):e0153072.

26. Wilkey ED, Ansari D. Challenging the neurobiological link between number sense and symbolic numerical abilities. *Annals of the New York Academy of Sciences* 2020;1464(1):76-98.

27. Burr DC, Turi M, Anobile G. Subitizing but not estimation of numerosity requires attentional resources. *Journal of Vision* 2010;10(6):20.

28. Paliwal V, Baroody AJ. Cardinality principal understanding: The role of focusing on the subitizing ability. *ZDM* 2020;52(4):649-661.

29. Trick LM, Pylyshyn ZW. Why are small and large numbers enumerated differently? A limited-capacity preattentive stage in vision. *Psychological Review* 1994;101(1):80.

30. Revkin SK, Piazza M, Izard V, Cohen L, Dehaene S. Does subitizing reflect numerical estimation? *Psychological Science* 2008 Jun;19(6):607-614.

31. Cheyette SJ, Piantadosi ST. A unified account of numerosity perception. *Nature Human Behaviour* 2020;4(12):1265-1272.

32. Mix KS, Levine SC, Newcombe N. Development of quantitative thinking across correlated dimensions. In: Henik A, ed. *Continuous issues in numerical cognition: How many or how much.* London, UK: Academic Press: 2016;1-33.

33. Piaget J. *The child's conception of number.* New York NY: Norton; 1941.

34. Briars DJ, Siegler RS. A featural analysis of preschoolers' counting knowledge. *Developmental Psychology* 1984;20:607-618.

35. Frye D, Braisby N, Lowe J, Maroudas C, Nicholls J. Young children's understanding of counting and cardinality. *Child Development* 1989;60:1158-1171.

36. Conoyer SJ, Foegen A, Lembke ES. Early numeracy indicators. Remedial Special Education 2016;37(3):159-171.

37. Jordan NC, Kaplan D, Ramineni C, Locuniak MN. Early math matters: Kindergarten number competence and later mathematics outcomes. *Developmental Psychology* 2009;45(3):850-

867.

38. Krajewski K, Schneider W. Exploring the impact of phonological awareness, visual–spatial working memory, and preschool quantity–number competencies on mathematics achievement in elementary school: Findings from a 3-year longitudinal study. *Journal of Experimental Child Psychology* 2009;103(4):516-31.
39. Missall KN, Mercer SH, Martínez RS, Casebeer D. Concurrent and longitudinal patterns and trends in performance on early numeracy curriculum-based measures in kindergarten through third grade. *Assessment for Effective Intervention* 2012;37(2):95-106.
40. Schneider RM, Brockbank E, Feiman R, Barner D. Counting and the ontogenetic origins of exact equality. Cognition 2022;218:104952.
41. Caviola S, Colling LJ, Mammarella IC, Szucs D. Predictors of mathematics in primary school: Magnitude comparison, verbal and spatial working memory measures. *Developmental Science* 2020;23:e12957.
42. Gobel SM, Watson SE, Lervag A, Hulme C. Children’s arithmetic development: It is number knowledge, not the approximate number system, that counts. *Psychological Science* 2014;25(3): 789-798.
43. Kolkman ME, Kroesbergen EH, Leseman PP. Early numerical development and the role of non-symbolic and symbolic skills. Learning and Instruction. 2013;25:95-103.
44. Toll SW, Kroesbergen EH, Van Luit JE. Visual working memory and number sense: Testing the double deficit hypothesis in mathematics. *British Journal of Educational Psychology* 2016;86(3):429-445.
45. Carey S. Where our number concepts come from. *The Journal of Philosophy* 2009;106(4):220-254.
46. Leibovich T, Katzen N, Harel M, Henik A. (2017) From “sense of number” to “sense of magnitude”: The role of continuous magnitudes in numerical cognition. *Behavioral and Brain Sciences* 2017;40:e164.
47. Mix KS, Huttenlocher J, Levine SC. Multiple cues for quantification in infancy: Is number one of them? *Psychological Bulletin* 2002;128:278-294.
48. Smets K, Sasanguie D, Szücs D, Reynvoet B. The effect of different methods to construct non-symbolic stimuli in numerosity estimation and comparison. *Journal of Cognitive*

Psychology 2015;27(3):310-325.

49. Cordes S, Brannon EM. Crossing the divide: infants discriminate small from large numerosities. *Developmental Psychology* 2009;45(6):1583-1594.

50. Cantrell L, Smith LB. Open questions and a proposal: A critical review of the evidence on infant numerical abilities. *Cognition* 2013;128(3):331-352.

51. Sella F, Slusser E, Odic D, Krajcsi A. The emergence of children's natural number concepts: Current theoretical challenges. *Child Development Perspectives* 2021;15(4):265-273.

52. Lourenco SF, Longo MR. General magnitude representation in human infants. *Psychological Science* 2010;21(6):873-881.

53. Baroody AJ, Dowker A. *The development of arithmetic concepts and skills: Constructing adaptive expertise.* Mahwah, NJ: Erlbaum; 2003.

54. Dehaene S. Varieties of numerical abilities. *Cognition* 1992;44(1-2):1-42.

55. Krajewski K, Schneider W. Early development of quantity to number-word linkage as a precursor of mathematical school achievement and mathematical difficulties: Findings from a four-year longitudinal study. *Learning and instruction* 2009;19(6):513-526.

56. Malone SA, Heron-Delaney M, Burgoyne K, Hulme C. Learning correspondences between magnitudes, symbols and words: Evidence for a triple code model of arithmetic development. *Cognition* 2019;187:1-9.

57. Mix KS, Sandhofer CM, Baroody A. Number words and number concepts: The interplay of verbal and nonverbal processes in early quantitative development. In: Kail RV, ed. *Advances in child development and behavior.* New York, NY: Academic Press; 2005:305-345.

58. Baroody AJ, Lai M, Mix KS Development of young children's early number and operation sense and its implications for early childhood education. In: Spodek B, Saracho ON, eds. *Handbook of research on the education of young children.* Mahwah, NJ: Erlbaum; 2006:187-221.

59. Clements DH, Sarama J, MacDonald BL. Subitizing: The neglected quantifier. In: Anderson A, Alibali MW, eds. *Constructing number: Merging perspectives from psychology and mathematics education*. Switzerland: Springer Cham; 2019;13-45.

60. Spelke E. What makes us smart? Core knowledge and natural language. In: Gentner D, Goldin-Meadow S, eds. *Language in mind.* Cambridge, MA: MIT Press; 2003.

61. Mix KS, Sandhofer CM, Moore JA, Russell C. Acquisition of the cardinal word principle: The role of input. *Early Childhood Research Quarterly.* 2012;27(2):274-283.

62. Sarnecka BW, Lee MD. Levels of number knowledge during early childhood. *Journal of Experimental Child Psychology*. 2009;103(3):325-337.

63. Mix KS. How Spencer made number: First uses of the number words. *Journal of Experimental Child Psychology* 2009;102:427-444.

64. Palmer A, Baroody AJ. Blake's development of the number words “one,”“two,” and “three”. *Cognition and Instruction* 2011;29(3):265-96.

65. Baroody AJ, Mix KS, Kartal G, Lai ML. The development and assessment of early cardinal-number concepts. *Journal of Numerical Cognition* 2023;9(1):182-95.

66. Krajcsi A. Follow-up questions influence the measured number knowledge in the Give-a-number task. *Cognitive Development* 2021;57:100968.

67. Marchand E, Lovelett JT, Kendro K, Barner D. Assessing the knower-level framework: How reliable is the Give-a-Number task? *Cognition* 2022;222:104998.

68. O'Rear CD, McNeil NM, Kirkland PK. Partial knowledge in the development of number word understanding. *Developmental Science* 2020;23(5):e12944.

69. Libertus ME, Feigenson L, Halberda J. Preschool acuity of the approximate number system correlates with school math ability. *Developmental Science* 2011;14(6):1292-300.

70. Halberda J, Mazzocco M, Feigenson L Individual differences in non-verbal number acuity predicts maths achievement. *Nature* 2008;455(7213):665-668.

71. Mazzocco M, Feigenson L, Halberda J. Preschoolers’ precision of the Approximate Number System predicta later school mathematics performance. *PLoS ONE* 2011;6(9):e23749.

72. Starr A, Libertus M, Brannon EM. Number sense in infancy predicts mathematical abilities in childhood. *Proceedings of the National Academy of Sciences* 2013;110(45):18116-18120.

73. DeSmedt B, Noel M-P, Gilmore C, Ansari D. How do symbolic and non-symbolic numerical magnitude processing skills relate to individual differences in children’s mathematical skills? A review of evidence from brain and behavior. *Trends in Neuroscience and Education* 2013;2(2):48-55.

74. Holloway ID, Ansari D. Mapping numerical magnitudes onto symbols: The numerical distance effect and individual differences in children’s mathematics achievement. *Journal of*

Experimental Child Psychology 2009;103(1):17-29.

75. Sasanguie D, Göbel SM, Moll K, Smets K, Reynvoet B. Approximate number sense, symbolic number processing, or number–space mappings: What underlies mathematics achievement? *Journal of Experimental Child Psychology* 2013;114(3):418-431.
76. Soltész F, Szűcs D, Szűcs L. Relationships between magnitude representation, counting and memory in 4-to 7-year-old children: A developmental study. *Behavioral and Brain Functions* 2010;6(1):1-4.
77. Iuculano T, Tang J, Hall CW, Butterworth B. Core information processing deficits in developmental dyscalculia and low numeracy. *Developmental Science* 2008;11(5):669-680.
78. Rousselle L, Noel MP. Basic numerical skills in children with mathematics learning disabilities: A comparison of symbolic vs. non-symbolic magnitude processing. *Cognition* 2007;102(3):361-395.
79. Elliott L, Feigenson L, Halberda J, Libertus ME. Bidirectional, longitudinal associations between math ability and approximate number system precision in childhood. *Journal of Cognition and Development* 2019;20(1):56-74.
80. Hannula MM, Lehtinen E. Spontaneous focusing on numerosity and mathematical skills of young children. *Learning and Instruction* 2005;15(3):237-256.
81. Gray SA, Reeve RA. Number-specific and general cognitive markers of preschoolers' math ability profiles. *Journal of Experimental Child Psychology* 2016. 147: 1-21.
82. Edens KM, Potter EF. An exploratory look at the relationships among math skills, motivational factors, and activity choice. *Early Childhood Education* 2013;41(3):235-243.
83. Hannula MM, Lepola J, Lehtinen E. Spontaneous focusing on numerosity as a domain-specific predictor of arithmetical skills. *Journal of Experimental Child Psychology* 2010;107(4):394-406.
84. Hannula-Sormunen MM, Lehtinen E, Räsänen P. Preschool children's spontaneous focusing on numerosity, subitizing, and counting skills as predictors of their mathematical performance seven years later at school. *Mathematical Thinking and Learning* 2015;17(2-3):155-177.
85. Gloor N, Leuenberger D, Moser Opitz E. Disentangling the Effects of SFON (Spontaneous Focusing on Numerosity) and Symbolic Number Skills on the Mathematical Achievement of

First Graders. A Longitudinal Study. *Frontiers in Education* 2021;6:629201.

86. Braham EJ, Libertus ME, McCrink K. Children’s spontaneous focus on number before and after guided parent-child interactions in a children’s museum. *Developmental Psychology* 2018;54(8): 1492-1498.

87. Hannula-Sormunen M, Nanu C, Luomaniemi K, Heinonen M, Sorariutta A, Södervik I, Mattinen A. Promoting spontaneous focusing on numerosity and cardinality-related skills at day care with one, two, how many and count, how many programs. *Mathematical Thinking and Learning* 2020;22(4):312-331.

88. Hornburg CB, Borriello GA, Kung M, Lin J, Litkowski E, Cosso J, Ellis A, King Y, Zippert E, Cabrera NJ, Davis-Kean P. Next directions in measurement of the home mathematics environment: An international and interdisciplinary perspective. *Journal of Numerical Cognition* 2021;7(2):195-220.

89. Mutaf-Yıldız B, Sasanguie D, De Smedt B, Reynvoet B. Probing the relationship between home numeracy and children's mathematical skills: A systematic review. *Frontiers in Psychology* 2020;11:2074.

90. LeFevre JA, Skwarchuk SL, Smith-Chant BL, Fast L, Kamawar D, Bisanz J. Home numeracy experiences and children’s math performance in the early school years. *Canadian Journal of Behavioural Science/Revue canadienne des sciences du comportement* 2009;41(2):55-66.

91. Anders Y, Rossbach HG, Weinert S, Ebert S, Kuger S, Lehrl S, Von Maurice J. Home and preschool learning environments and their relations to the development of early numeracy skills. *Early Childhood Research Quarterly* 2012;27(2):231-244.

92. Leyva D, Yeomans-Maldonado G, Weiland C, Shapiro A. Latino kindergarteners' math growth, approaches to learning, and home numeracy practices. *Journal of Applied Developmental Psychology* 2022;80:101417.

93. Missall K, Hojnoski RL, Caskie GI, Repasky P. Home numeracy environments of preschoolers: Examining relations among mathematical activities, parent mathematical beliefs, and early mathematical skills. *Early Education and Development* 2015;26(3):356-376.

94. Napoli AR, Purpura DJ. The home literacy and numeracy environment in preschool: Cross-domain relations of parent–child practices and child outcomes. *Journal of Experimental Child Psychology* 2018;166:581-603.

95. Levine SC, Suriyakham LW, Rowe ML, Huttenlocher J, Gunderson EA. What counts in the development of young children's number knowledge? *Developmental Psychology* 2010;46(5):1309-1319.

96. Mendelsohn A, Suárez-Rivera C, Suh DD, Tamis-LeMonda CS. Word by word: Everyday math talk in the homes of Hispanic families. *Language Learning and Development* 2023 Oct 2;19(4):386-403.

97. Ramani GB, Rowe ML, Eason SH, Leech KA. Math talk during informal learning activities in Head Start families. *Cognitive Development* 2015;35:15-33.

98. Susperreguy MI, Davis-Kean PE. Maternal math talk in the home and math skills in preschool children. *Early Education and Development* 2016;27(6):841-857.

99. Eason SH, Nelson AE, Dearing E, Levine SC. Facilitating young children’s numeracy talk in play: The role of parent prompts. *Journal of Experimental Child Psychology* 2021;207:105124.

100. Gibson DJ, Gunderson EA, Levine SC. Causal effects of parent number talk on preschoolers’ number knowledge. *Child Development* 2020;91(6):e1162-77.

101. Gunderson EA, Levine SC. Some types of parent number talk count more than others: Relations between parents’ input and children’s cardinal-number knowledge. *Developmental Science* 2011;14(5):1021-1032.

Trajectoires d’apprentissage des premières mathématiques : séquences d’acquisition et d’enseignement

Douglas H. Clements, Ph.D., Julie Sarama, Ph.D.

Marsico Institute for Early Learning, College of Education, University of Denver, États-Unis

Août 2023, Éd. rév.

Introduction

Les enfants suivent des progressions du développement naturelles lors de leur apprentissage et de leur développement. Par exemple, les enfants apprennent d’abord à ramper puis à marcher, courir, sautiller et sauter avec une vitesse et une dextérité croissantes. De même, ils suivent des progressions du développement naturelles lors de l’apprentissage des mathématiques; ils apprennent les concepts et les aptitudes mathématiques d’une façon qui leur est propre.[1] Lorsque les éducateurs comprennent ces progressions du développement et qu’ils se fondent sur celles-ci pour établir une séquence d’activités, ils peuvent bâtir des environnements d’apprentissage enrichis sur le plan des mathématiques qui sont appropriés et efficaces sur le plan du développement. Ces chemins du développement constituent un élément principal d’une *trajectoire d’apprentissage.*

Questions clés pour la recherche

Les trajectoires d’apprentissage nous aident à répondre à plusieurs questions.

1. Quels buts devrions-nous établir?
2. Par où devrions-nous commencer, c’est-à-dire, quel est le niveau de développement des enfants?
3. Comment savons-nous quelle est notre prochaine étape?
4. Comment y parvenir?

Récents résultats de recherche

Récemment, les chercheurs sont arrivés à une entente de base concernant la nature des trajectoires d'apprentissage.[2] Les trajectoires d'apprentissage ont trois parties : a) un objectif mathématique; b) un chemin développemental le long duquel les enfants se développent pour atteindre l'objectif en question; et c) un ensemble d'activités pédagogiques, correspondant à chacun des niveaux de pensée le long de ce chemin, qui aident les enfants à développer des niveaux de pensée plus élevés. Penchons-nous sur chacune de ces trois parties.

Objectifs : les principales idées des mathématiques

La première partie d'une trajectoire d'apprentissage consiste en un *objectif mathématique*. Les objectifs concernent les *idées principales des mathématiques* : des groupes de concepts et d'aptitudes qui sont centraux et cohérents sur le plan mathématique, qui correspondent à la façon de penser des enfants, et qui génèrent un apprentissage futur. Ces grandes idées sont le fruit de plusieurs efforts nationaux.[3-6] Par exemple, une idée principale est le fait que *le comptage peut être utilisé pour trouver le nombre d'objets dans une collection. Une autre idée serait le fait que les formes géométriques peuvent être décrites, analysées, transformées et composées et décomposées en d'autres formes*. Il est important de savoir qu'il existe un bon nombre de ces idées principales et trajectoires d'apprentissage.

Progressions du développement : les chemins de l'apprentissage

La deuxième partie d'une trajectoire d'apprentissage comprend les niveaux de pensée, chacun étant plus sophistiqué que le précédent, par lequel la plupart des enfants progressent sur la voie de la réalisation de l'objectif mathématique. Autrement dit, la progression développementale décrit un chemin normal suivi par les enfants lorsqu'ils développent leur compréhension et leurs aptitudes concernant le sujet mathématique en question. Le développement des aptitudes en mathématiques commence dès le plus jeune âge. Les jeunes enfants possèdent, dès la naissance, certaines compétences de nature mathématique relatives au nombre, à la perception spatiale et aux motifs.[1,4]

Cependant, les idées des jeunes enfants et leur interprétation des situations sont particulièrement différentes de celles des adultes. Pour cette raison, les éducateurs de la petite enfance s'assurent que les enfants « voient » les situations, les problèmes ou les solutions comme ils le font. Les enseignants interprètent plutôt ce que fait et pense l'enfant ; ils tentent de voir la situation selon le point de vue de l'enfant. De même, lorsque ces enseignants sont en interaction avec l'enfant, ils considèrent également les activités pédagogiques et leurs propres actes à travers les yeux de l'enfant. Pour ces raisons, l'enseignement à la petite enfance est une tâche aussi exigeante que gratifiante.

Les trajectoires d'apprentissage fournissent des identifiants et des descriptions simples pour chaque niveau de réflexion dans tous les domaines mathématiques. Le tableau 1 illustre une partie de la trajectoire d'apprentissage pour le comptage. La colonne Progression développementale fournit un identifiant et une description pour chaque niveau. Il est important de noter que les âges indiqués dans la première colonne sont approximatifs. Sans expérience, certains enfants peuvent avoir des années de recul sur cet âge moyen. Par contre, une éducation de qualité supérieure peut permettre aux enfants de dépasser considérablement ces moyennes. (Pour avoir un aperçu complet des trajectoires d'apprentissage dans tous les domaines des mathématiques y compris les recherches sur lesquelles elles sont basées, voir les références[1,7] ainsi que LearningTrajectorie.org].

Activités pédagogiques : les chemins de l'enseignement

La troisième partie d'une trajectoire d'apprentissage comprend un ensemble de stratégies et d'activités pédagogiques correspondant à chacun des niveaux de pensée dans la progression développementale, conçues pour aider les enfants à apprendre les idées et les aptitudes nécessaires pour atteindre ce niveau de pensée. C'est-à-dire qu'en tant qu'enseignants, nous pouvons avoir recours à ces stratégies et activités pour favoriser le passage des enfants d'une colonne à l'autre. La troisième colonne du tableau 1 indique des exemples.

Tableau 1. Échantillon d'exemples tirés de la trajectoire d'apprentissage relative au comptage [Voir références[1,7] ainsi que LearningTrajectorie.org].

Âge	Progression développementale	Activités pédagogiques
1 an	**Pré-compteur : éléments de base.** Pas de comptage à voix haute, mais nomme certains noms de nombre. **Chantonneur** Répète en chantonnant des noms de nombre parfois inintelligibles.	Associer le nom des nombres avec des petites quantités (voir « Subitizing » dans les ressources) et compter à voix haute pour le plaisir (p. ex., en montant les escaliers).

Âge	Progression développementale	Activités pédagogiques
2	**Réciteur** Compte à voix haute avec des mots séparés, pas nécessairement dans le bon ordre.	Fournir une expérience répétée et fréquente avec la séquence de comptage dans différents contextes. *Comptage et course.* Les enfants comptent à voix haute avec l’ordinateur (jusqu’à 50) en ajoutant des voitures sur une piste de course, une à la fois.
3	**Réciteur (10)** Compte jusqu’à dix à voix haute, avec une certaine correspondance avec les objets.	*Comptage et mouvement.* Demandez à tous les enfants de compter de 1 à 10 (ou jusqu’à un chiffre approprié), en faisant des mouvements avec chaque chiffre. Par exemple, en disant « un » [toucher la tête], « deux » [toucher les épaules], « trois » [toucher la tête], et ainsi de suite.
	Correspondant Conserve une correspondance d’un à un entre les mots de comptage et les objets (un mot par objet), au moins pour des groupes peu nombreux d’objets disposés sur une ligne.	*Baguette à compter.* Les enfants utilisent une baguette à compter pour compter le nombre d’enfants dans un groupe en se concentrant sur la correspondance 1 à 1.

Âge	Progression développementale	Activités pédagogiques
4	**Compteur** (petits nombres) Compte avec exactitude des objets disposés sur une ligne jusqu’à 5, et répond à la question « combien » en disant le dernier nombre compté.	*Cubes dans la boîte.* Demandez aux enfants de compter un petit ensemble de cubes. Les mettre dans une boîte et fermer le couvercle. Demandez ensuite à l’enfant combien de cubes ont été cachés. Si l’enfant est prêt, lui demander d’écrire le chiffre. Sortez les cubes de la boîte et comptez-les ensemble pour vérifier.
	Producteur (petits nombres) Compte des objets jusqu’à 5. Reconnaît que le comptage est pertinent pour des situations où un certain nombre doit être indiqué.	*Comptage des mouvements.* Lors de l’attente pendant les transitions, demandez aux enfants de compter le nombre de fois que vous sautez ou que vous tapez dans les mains, ou faites tout autre mouvement. Demandez-leur ensuite de répéter ces mouvements le même nombre de fois. Au début, comptez les mouvements avec les enfants.

Âge	Progression développementale	Activités pédagogiques
5	**Compteur et producteur** (10+) Compte et compte à voix haute les objets jusqu'à 10 sans erreur, puis va plus loin (jusqu'à 30 environ). A acquis une compréhension explicite de la cardinalité (comment les chiffres indiquent le nombre). Garde le suivi des objets qui ont été comptés et de ceux qui ne l'ont pas été, même s'ils sont disposés différemment.	*Comptage de tours (au-delà de 10).* Pour permettre aux enfants de compter jusqu'à 120 et au-delà, demandez-leur de construire de tours avec des objets tels que des pièces de monnaie. Les enfants doivent construire une tour en allant le plus haut possible, en ajoutant des pièces de monnaie, sans redresser celles qui sont déjà dans la tour. L'objectif consiste à estimer puis à compter pour trouver le nombre de pièces de monnaie dans la tour la plus haute.

En résumé, les trajectoires d'apprentissage décrivent les objectifs de l'apprentissage, les processus de pensée et d'apprentissage des enfants de différents niveaux, et les activités d'apprentissage auxquelles ceux-ci pourraient prendre part. Les gens ont souvent plusieurs questions à poser concernant les trajectoires d'apprentissage.

Comment les niveaux de développement de Trajectoires d'apprentissage soutiennent-ils l'enseignement et l'apprentissage? Les niveaux permettent aux enseignants de comprendre le système de pensée des enfants et ainsi mieux créer, modifier et ordonner des activités. Les enseignants qui intègrent les trajectoires d'apprentissage sont plus efficaces, performants, et rendent les mathématiques captivantes pour les enfants. Lorsqu'ils planifient adéquatement l'enseignement des mathématiques informelles et en encouragent l'apprentissage ancré dans le quotidien, les enseignants aident les enfants à acquérir des connaissances ancrées et de niveau approprié.

Il y a des catégories d'âges dans les Trajectoires d'apprentissage. Devrais-je concevoir le plan d'apprentissage pour aider les enfants à atteindre seulement les niveaux correspondant à leurs âges? Les âges dans le tableau servent d'indication pour les âges durant lesquels ces notions sont typiquement développées. Ils servent de repères : le développement de chaque enfant varie énormément. Certains enfants atteignent des niveaux plus avancés par le biais d'une éducation de haute qualité. Ce sont donc des niveaux approximatifs, et non des objectifs, qui sont proposés pour orienter les éducateurs. Les enfants qui reçoivent une éducation de haute qualité en mathématiques peuvent développer des aptitudes correspondant à celles d'un groupe d'âge plus avancé d'un an, voire plus.

Y a-t-il d'autres façons que les activités ou tâches pédagogiques pour inculquer aux enfants des niveaux de pensée supérieurs? Oui, il y en a de nombreuses autres. Toutefois, des résultats de recherche démontrent que ces méthodes sont particulièrement efficaces dans certains cas. En d'autres cas, ce sont plutôt des exemples du genre d'activités qui seraient appropriées pour atteindre le niveau de pensée en question. Les enseignants peuvent enrichir leur enseignement du contenu de diverses stratégies pédagogiques, que ce soit dans la présentation des activités, dans leur manière d'aider les enfants au cours de celles-ci, et toutes autres facettes de leur pratique.

Orientations futures

Bien que les trajectoires d'apprentissage se soient avérées efficaces pour les programmes de premières mathématiques et pour le perfectionnement professionnel,[8-10] il en reste encore beaucoup à apprendre, comme les trajectoire d'apprentissage des élèves plus âgés. De plus, lors de la petite enfance, plusieurs trajectoires d'apprentissage, telles que celles relatives au comptage et à l'arithmétique, sont fondées sur un grand nombre d'études. Cependant, d'autres, telles que la création de motifs, sont fondées sur un nombre d'études beaucoup moins important. Il s'agit là de défis à relever dans ce domaine.

Conclusions

Les trajectoires d'apprentissage représentent une avenue prometteuse pour l'amélioration du développement professionnel et de l'éducation des premières mathématiques.[8,11,12] Les chercheurs vont plus loin encore, et suggèrent que le développement professionnel axé sur les trajectoires d'apprentissage n'améliore pas seulement les connaissances professionnelles des enseignants, il rehausse aussi la motivation et le succès des élèves.[8,13-15] Les trajectoires d'apprentissage peuvent ainsi rendre accessible à tous les enfants un enseignement captivant et approprié à leur développement.

Note des auteurs :

Cette étude a été possible grâce au soutien de l'Institute of Education Sciences, U.S. Department of Education, à travers les subventions nº R305A120813, nº R305K05157 nº R305A110188. Les opinions exprimées ici sont ceux des auteurs et ne représentent pas ceux du U.S. Department of Education.

Références

1. Clements DH, Sarama J. *Learning and teaching early math: The learning trajectories approach*. 3rd ed. New York, NY: Routledge; 2020.

2. Maloney AP, Confrey J, Nguyen KH, eds. *Learning over time: Learning trajectories in mathematics education*. New York, NY: Information Age Publishing; 2014.

3. Clements DH, Sarama J, DiBiase A-M. *Engaging young children in mathematics: Standards for early childhood mathematics education*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates Publishers; 2004.

4. Cross CT, Woods TA, Schweingruber H. *Mathematics learning in early childhood: Paths toward excellence and equity*. Washington DC: National Research Council of the National Academics; 2009.

5. NCTM. *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics; 2000.

6. NGA/CCSSO. *Common core state standards.* Washington, DC: National Governors Association Center for Best Practices, Council of Chief State School Officers; 2010.

7. Sarama J, Clements DH. *Early childhood mathematics education research: Learning trajectories for young children*. New York, NY: Routledge; 2009.

8. Clements DH, Sarama J, Layzer C, Unlu F. Implementation of a scale-up model in early childhood: Long-term impacts on mathematics achievement. *Journal for Research in Mathematics Education*. 2023;54(1):64-88.

9. Sarama J, Clements DH, Guss SS. Longitudinal evaluation of a scale-up model for professional development in early mathematics. In: Dunekacke S, Jegodtka A, Koinzer T, Eilerts K, Jenßen L, eds. *Early childhood teachers‘ professional competence in mathematics*. London, England: Routledge: 2022:163-186.

10. Dumas DG, McNeish D, Sarama J, Clements DH. Preschool mathematics intervention can significantly improve student learning trajectories through elementary school. *AERA Open*. 2019;5(4):1-5.

11. Clements DH, Sarama J, Baroody AJ, Joswick C. Efficacy of a learning trajectory approach compared to a teach-to-target approach for addition and subtraction. *ZDM Mathematics Education*. 2020;52(4):637-648.

12. Verschaffel L, Bojorquea G, Torbeyns J, Van Hoof J. Persistence of the Building Blocks’ impact on Ecuadorian children’s early numerical abilities. In: *Proceedings of the EARLI 2019*. Aachen University, Germany:10-16.

13. Clarke BA. A shape is not defined by its shape: Developing young children’s geometric understanding. *Journal of Australian Research in Early Childhood Education.* 2004;11(2):110-127.

14. Fennema EH, et al. A longitudinal study of learning to use children's thinking in mathematics instruction. *Journal for Research in Mathematics Education*. 1996;27:403-434.

15. Wright RJ, Martland J, Stafford AK, Stanger G. *Teaching number: Advancing children's skills and strategies*. London: Sage Publications; 2002.

Favoriser la numératie précoce en prématernelle et en maternelle

Arthur J. Baroody, Ph.D.

College of Education, University of Illinois at Urbana-Champaign, États-Unis

Avril 2024, Éd. rév.

Introduction

Au cours des six dernières décennies, il est devenu de plus en plus clair que les connaissances mathématiques de tous les jours (informelles) des enfants constituent un fondement important pour l'apprentissage des mathématiques à l'école (formelles).[1,2,3] Prenons l'exemple d'une question qui a fait l'objet d'un long débat : comment aider au mieux les élèves à maîtriser les additions (de base) à un chiffre, telles que 3 + 4 = 7 et 9 + 5 = 14, et les soustractions associées, telles que 7 - 3 = 4 et 14 - 9 = 5 (voir par ex. Baroody et Dowker,[4] en particulier les chapitres 2, 3, 6 et 7)? (La maîtrise de ces opérations implique de générer des sommes et des différences rapidement et avec précision et d'appliquer ces connaissances de manière appropriée et flexible[5]). Les recherches indiquent qu'aider les enfants à développer leur sens des nombres au cours des années préscolaires et primaires peut favoriser la maîtrise des opérations.[6,7,8,9] Le but du présent article consiste à résumer comment le développement d'une perception des nombres informelle avant la maternelle et la première année fourni les bases d'une aptitude gagnante pour maîtriser les procédés de l'addition et de la soustraction en deuxième et troisième année.

Questions clés pour la recherche

1. À quel moment les parents et les éducateurs de la petite enfance doivent-ils commencer (a) le processus consistant à encourager la perception des nombres et (b) les efforts visant à favoriser directement la maîtrise des procédés?
2. Quels sont les éléments préalables relatifs au développement que les enfants de prématernelle et de maternelle ont besoin pour maîtriser les additions et les soustractions de base de façon efficace?
3. Quel est le rôle joué par le langage dans le développement de ces connaissances fondamentales?

4. Comment les parents et les éducateurs de la petite enfance peuvent-ils encourager de la façon la plus efficace possible la perception des nombres et la maîtrise des procédés?

Récents résultats de recherche

Question 1. Le processus consistant à aider les enfants à développer leur perception des nombres, qui représente les fondements de la maîtrise des procédés, peut et doit commencer pendant les années préscolaires. Les études récentes indiquent que les enfants commencent à développer très tôt leur perception des nombres. En fait, certains bambins âgés de seulement 18 mois et presque tous les enfants de 2 ans ont commencé à apprendre les éléments sur le plan du développement qui sont préalables à la maîtrise des procédés (p. ex., voir Baroody, Lai, & Mix,[1] pour une analyse).

La réussite des efforts consistant à encourager la maîtrise des procédés dépend du fait que l'on s'assure que l'enfant est prêt sur le plan du développement et qu'il n'est pas bousculé. Les études indiquent que des différences individuelles importantes sur le plan de la perception des nombres apparaissent dès l'âge de deux ou de trois ans et augmentent souvent avec l'âge;[1,10] il n'existe donc aucune règle ferme concernant le moment où devrait commencer une formation officielle relative à la maîtrise des faits. Cependant, pour de nombreux enfants, il est possible que même avec les sommes les plus simples (n+0 et n+1), une telle formation ne soit pas appropriée sur le plan du développement avant la fin de la maternelle ou le début de la première année.[11] Pour les enfants à risque d'échec sur le plan scolaire, il arrive souvent que même les sommes les plus simples n'aient aucun sens avant la première ou la deuxième année.[12]

Questions 2 et 3. Certaines études indiquent que le langage, sous la forme du nom des premiers nombres, joue un rôle clé dans le développement de la perception des nombres (pour obtenir une discussion détaillée, voir Baroody;[3] Mix, Sandhofer, & Baroody[13]). Plus spécifiquement, il peut fournir une base pour deux fondements de la perception précoce des nombres, c'est-à-dire le concept de nombre cardinal (le nombre total d'objets dans une collection) et l'aptitude de reconnaissance verbale des nombres, généralement appelée « subitisation », illustrés en haut de la figure 1. La reconnaissance verbale des nombres consiste à percevoir de façon fiable et efficace le nombre d'objets dans des collections peu nombreuses et à désigner celui-ci par le bon nom. L'utilisation de « un », « deux », « trois », conjointement avec la visualisation d'exemples et de contre exemples de chacun peut aider les enfants de 2 et 3 ans à développer un concept de plus en plus fiable et exact des « nombres intuitifs » *un*, *deux* et *trois*, c'est-à-dire une compréhension du concept de un, de deux et de trois. Prenons l’exemple du processus de compréhension du chiffre « deux » :

- En voyant divers exemples de paires tels que □□□□, □□□□, □□, et □□□□, toutes désignées par « deux », les jeunes enfants peuvent reconnaître que l’apparence des objets faisant partie des collections n’a aucune importance (la forme et la couleur ne sont pas pertinents pour le nombre). Cela peut également leur fournir un identifiant (« deux ») pour leur concept intuitif de *pluralité* (plus d’un objet).
- Les contre exemples de paires tels que □□, □□□□□□, □, et □□□□□□ désignés comme n'étant « pas deux » o avec le nom d’un autre nombre, peut les aider à définir les limites du concept de *deux*.

Les implications clés pour l’enseignement sont que la compréhension de base des nombres cardinaux n’est pas innée et qu’elle ne se développe pas automatiquement (cf. Dehaene[15]).[14,16] Les parents et les éducateurs de prématernelle sont importants pour fournir les expériences et la rétroaction nécessaires pour développer les concepts numériques. Ils devraient tirer parti des situations porteuses de sens qu’ils rencontrent tous les jours afin de nommer (et d’encourager les enfants) à nommer des collections peu nombreuses (p. ex., « Combien de pieds as-tu? » « Tu as donc besoin de deux chaussures, pas seulement d’une. » « Tu peux prendre un seul biscuit, mais pas deux. ») Certains enfants entrent en maternelle sans pouvoir reconnaître tous les nombres intuitifs. De tels enfants présentent un risque grave d’échec scolaire et ont besoin d’orthopédagogie intensive. À la maternelle, le dépistage doit vérifier si les enfants peuvent percevoir immédiatement des collections comptant entre un et trois objets et les distinguer de collections un peu plus nombreuses, comptant quatre ou cinq objets.

Comme l’illustre la **figure 1**, la co-évolution des concepts cardinaux des nombres intuitifs et l’aptitude à la reconnaissance visuelle des nombres peuvent jeter les bases de concepts et d’aptitudes variés concernant les nombres, le comptage et l’arithmétique, y compris la maîtrise des faits élémentaires d’addition et de soustraction. Les concepts relatifs aux petits nombres et la reconnaissance verbale des nombres peuvent fournir les bases pour le comptage verbal significatif. La perception des nombres intuitifs peut aider les enfants à voir littéralement qu’une collection désignée par « deux » compte davantage d’objets qu’une collection désignée par « un », et qu’une collection désignée par « trois » compte davantage d’objets qu’une collection désignée par « deux ». Cette compréhension ordinale de base des nombres, à son tour, peut aider les enfants à comprendre que l’ordre du nom des nombres importe lors du comptage (le *principe* *d’ordre stable*) et que la séquence des noms des nombres (« un, deux, trois… ») désigne des collections de plus en plus importantes. Au fur et à mesure qu’un enfant se familiarise avec la séquence de comptage, il développe la capacité de commencer à n’importe quel point dans la séquence et à indiquer (de façon efficace) le nom du nombre suivant dans la séquence (aptitude relative au nombre suivant) au lieu de compter à partir de « un ».

La capacité de nommer automatiquement le nombre qui vient tout de suite après un autre nombre dans la séquence de comptage peut constituer le fondement de la perception du fait qu’ajouter « un » à un nombre produit un nombre plus grand et, ce qui est plus important, de la règle du nombre suivant pour les faits n+1/1+n. Lorsqu’« un » est ajouté, la somme représente le nombre suivant l’autre nombre dans la séquence de comptage (c.-à-d. que la somme de 7+1 correspond au nombre suivant « sept » lors du comptage, soit « huit »).

Figure 1 : Trajectoire d’apprentissage de concepts et d’aptitudes clés en matière de nombres, de comptage et d’arithmétique

Image not found or type unknown

Cette stratégie de raisonnement peut permettre aux enfants de déduire de façon efficace la somme de toute combinaison semblable pour laquelle ils connaissent la séquence de comptage, même celles que les enfants n’ont pas encore répétées, telles que les faits d’addition de grands nombres à plusieurs chiffres comme 28+1, 128+1 ou 1 000 128+1. Avec le temps, cette stratégie de raisonnement devient automatique : elle peut être appliquée de façon efficace, sans délibération (c.-à-d. elle devient un élément du réseau de récupération en mémoire). Autrement dit, elle devient le fondement de la maîtrise des procédés pour les combinaisons *n*+1/1+*n*.

La reconnaissance verbale des nombres, et le concept de cardinalité qu'elle représente, peut constituer un fondement pour le comptage significatif d'objets.[17] Les enfants qui peuvent subitiser des collections jusqu'à « quatre » sont plus susceptibles de bénéficier des efforts des adultes visant à démontrer et enseigner le comptage d'objets que ceux qui ne le peuvent pas. Lorsque le modelage consiste à compter et à étiqueter une collection dans la fourchette de subitisation des enfants, ils sont également plus susceptibles de reconnaître le but du comptage d'objets (une autre façon de déterminer le total d'une collection) et la justification des procédures de comptage d'objets (p. ex., la raison pour laquelle certaines personnes mettent l'accent sur le nom du dernier nombre utilisé lors du processus de comptage ou le répètent est qu'il représente le total de la collection).[18] Le comptage significatif d'objets est nécessaire à l'invention de stratégies de comptage (avec des objets ou le nom des nombres), afin de déterminer les sommes et les différences. Au fur et à mesure que ces stratégies deviennent efficaces, l'attention est libérée et permet de découvrir des schémas et des relations; ces régularités mathématiques, à leur tour, peuvent devenir la base de stratégies de raisonnement (c.-à-d. le recours à des relations et à des procédés connus pour déduire la réponse à une combinaison inconnue). Au fur et à mesure que ces stratégies deviennent automatiques, elles peuvent devenir l'une des stratégies de récupération en mémoire qui permettront de produire des réponses de façon efficace à partir d'un réseau de mémoire ou de récupération en mémoire.

La reconnaissance verbale des nombres peut permettre à un enfant de voir qu'un plus un égalent *deux*, qu'un plus un plus un égalent *trois*, ou que deux plus un égalent trois, et le contraire (p. ex., *trois* égalent un plus un plus un ou deux plus un). L'enfant développe ainsi une compréhension de la composition et de la décomposition (un tout peut être bâti à partir d'éléments individuels ou décomposé en éléments individuels, souvent de différentes façons). Le fait de voir à de nombreuses reprises la composition et la décomposition de *deux* et de *trois* peut générer la maîtrise des procédés d'addition et de soustraction les plus simples (p. ex., « un plus un égalent deux », « deux plus un égalent trois », et « deux moins un égalent un »). La décomposition répétée de *quatre* et de *cinq*, avec de la rétroaction (p. ex., en désignant une collection de quatre comme étant « deux plus deux » et en entendant une autre personne confirmer que « oui, deux plus deux égalent quatre », peut générer une maîtrise des précédés jusqu'à cinq avec les sommes les plus simples, et représente une des façons de découvrir la règle du nombre suivant pour les combinaisons n+1/1+n (dont nous avons discuté précédemment).

Ensemble, le concept de cardinalité, la reconnaissance verbale des nombres et les concepts de composition et de décomposition peuvent fournir les fondements du développement d'un concept fondamental de l'addition et de la soustraction. Par exemple, en ajoutant un objet à une collection de deux objets, un enfant peut littéralement voir que la collection d'origine a été transformée en collection plus importante comptant trois objets. Ces compétences peuvent également fournir les fondements du développement d'une compréhension relativement concrète, et même relativement abstraite, des concepts arithmétiques suivants[19] :

- Concept de la négation soustractive Par exemple, quand les enfants reconnaissent que lorsqu'on a deux blocs et qu'on enlève deux blocs, il ne reste aucun bloc, ils peuvent en déduire que *tout nombre qui se soustrait lui-même ne laisse rien.*
- Concept d'identité additive et soustractive Par exemple, quand les enfants reconnaissent que lorsqu'on a deux blocs et qu'on n'en enlève aucun, il reste deux blocs, ils peuvent déduire la régularité selon laquelle si on n'enlève rien d'un nombre, celui-ci ne change pas. Les concepts de négation soustractive et d'identité soustractive peuvent fournir les fondements de la maîtrise des procédés avec les familles de faits de soustraction respectives n-n=0 et n-0=n.

En conséquence, une faible perception des nombres peut nuire au développement de la maîtrise des procédés et à d'autres aspects des réalisations mathématiques. Par exemple, Mazzocco et Thompson[20] ont constaté que le rendement des enfants d'âge préscolaire sur les quatre éléments suivants du Test of Early Mathematics Ability – deuxième édition (TEMA-2) permettait de prédire quels enfants éprouveraient des difficultés en mathématiques en deuxième et en troisième années : le comptage significatif des objets (reconnaître que le dernier nombre utilisé lors du processus de comptage indique le total), la cardinalité, la comparaison de nombres d'un chiffre (p. ex., Lequel est le plus grand : quatre ou cinq?), l'addition mentale de nombres d'un chiffre et la lecture de nombres d'un chiffre. Notez que la reconnaissance verbale des nombres intuitifs est un fondement des trois premières aptitudes et un apprentissage significatif de la quatrième.

Question 4. La base consistant à aider les élèves à développer la perception des nombres en général et la maîtrise des faits en particulier crée des occasions leur permettant de découvrir des schémas et des relations. Par exemple, un enfant qui a appris les « doublons », tels que 5+5=10 et 6+6=12, d'une manière porteuse de sens (c.-à-d., l'enfant reconnaît que les sommes de cette famille sont toutes des nombres pairs), peut utiliser cette connaissance pour déduire les sommes de faits de doublons-plus-un inconnus, tels que 5+6 ou 7+6.

Pour être appropriées au développement de l'enfant, de telles occasions d'apprentissage doivent être ciblées, pertinentes et fondées sur le questionnement.[21]

- L'enseignement doit avoir un but et retenir l'attention des enfants. Cela peut être réalisé en intégrant l'enseignement à des jeux structurés (p. ex., un jeu consistant à lancer un dé peut aider les enfants à reconnaître les schémas réguliers entre un et six). Les leçons de musique et d'art peuvent servir de véhicules naturels pour la réflexion concernant les schémas, les nombres et les formes (p. ex., battre un rythme de deux ou trois, dessiner des groupes de ballons). Les parents et les enseignants peuvent tirer parti de nombreuses situations de tous les jours (p. ex., « Combien de pieds as-tu? ... Donc, combien de chaussettes faut-il sortir du tiroir? » Les questions des enfants peuvent représenter une source importante d'enseignement.
- L'enseignement doit être porteur de sens pour les enfants, et doit développer petit à petit ce qu'ils connaissent déjà (et y être lié). Un objectif significatif pour les adultes travaillant avec des enfants de deux ans est de faire reconnaître « deux » aux enfants. Le fait de les pousser trop rapidement à reconnaître des nombres plus importants, tel que *quatre*, peut être accablant et faire en sorte qu'ils se découragent (qu'ils deviennent inattentifs ou agressifs, qu'ils devinent n'importe quoi, ou qu'ils se désintéressent de l'activité).
- Dans la mesure du possible, l'enseignement doit être fondé sur l'interrogation ou susciter la réflexion. Au lieu de simplement donner des informations aux enfants, les parents et les enseignants doivent donner aux enfants l'occasion de réfléchir à un problème ou à une tâche, de conjecturer (faire des hypothèses bien fondées), de concevoir leurs propres stratégies ou de déduire leur propre réponse.

Les différents éléments ci-dessus sont illustrés par les cas d'Alice[22] et de Lukas.[23]

- *Le cas d'Alice.* Depuis plusieurs mois, la fillette de deux ans et demi pouvait reconnaître un, deux ou trois objets. Ses parents souhaitaient donc élargir ses connaissances jusqu'au nombre quatre, qui était tout près de ses compétences. Au lieu de simplement désigner des collections de quatre objets pour elle, ils l'ont interrogée concernant des collections de quatre objets. Alice réagissait souvent en décomposant les collections qu'elle ne reconnaissait pas en deux collections familières de deux objets chacun. Ses parents développaient alors sa réponse en lui disant, « Deux plus deux égalent quatre. » À 30 mois, *lorsqu'on lui montra l'image de quatre chiots, Alice posa deux doigts de la main gauche sur deux chiots et dit : « Deux. » Tout en maintenant cette position, elle posa deux doigts de la main droite sur les deux autres chiots et dit : « Deux ». Elle eut ensuite recours à la relation connue « 2 plus 2 égalent 4 » (que ses parents lui avaient apprise) pour spécifier la cardinalité de la collection.*

- *Le cas de Lukas.* Dans le cadre d'un jeu de mathématiques sur ordinateur, la question 6+6 fut présentée à Lukas. Celui-ci détermina la somme en comptant. Peu après, la question 7+7 lui fut posée. Il sourit et répondit, « Treize. » Lorsque l'ordinateur lui indiqua que la somme était en fait 14, il sembla perplexe. Quelques questions plus tard, la question 8+8 lui fut posée, et il remarqua : « J'allais dire 15, parce que 7+7 égalaient 14. Mais auparavant 6+6 égalaient 12, j'étais certain que 7+7 égalaient 13 mais c'était 14. Alors je vais dire que 8+8 égalent 16. »

Favoriser la maîtrise des opérations de soustraction : la méthode longue

Pour illustrer les implications des recherches récentes évoquées précédemment, examinons l'apprentissage de la maîtrise des opérations de soustraction de base les plus difficiles, telles que « 8 - 5 » et « 15 - 7 ». Les professeurs de mathématiques, les éditeurs de manuels scolaires et les décideurs en matière d'éducation recommandent couramment d'aider les enfants à apprendre ces opérations en leur faisant acquérir une stratégie de raisonnement qui appréhende la soustraction sous forme d'addition (par exemple, pour « 8 - 5 », il faut se dire : « Qu'est-ce qu'il faut ajouter à cinq pour faire huit? »).[24,25] La méthode courte, qui est trop souvent pratiquée, consiste à imposer (en illustrant ou en démontrant) la stratégie de raisonnement et dans certains cas à tenter de l'expliquer brièvement. Une pratique limitée de la stratégie est ensuite utilisée pour faire en sorte qu'elle devienne un automatisme. Le fait que nombre d'enfants *ne comprennent pas* la stratégie constitue une sérieuse limite de la méthode courte. En effet, cela peut les amener à la mémoriser sans pour autant parvenir à l'appliquer au moment opportun, voire à l'oublier complètement, ou encore à en mémoriser par cœur une version erronée ou à ne faire absolument aucun effort de mémorisation.

La méthode longue, qui consiste à utiliser l'addition comme stratégie de soustraction, ne saurait être enseignée en quelques jours, semaines, mois, ni même en un an. En effet, les expériences informelles et formelles des enfants les amènent souvent à penser que l'addition et la soustraction sont deux opérations qui n’ont aucun lien et que la connaissance de l’une ne peut pas contribuer à la compréhension de l’autre. La clé pour parvenir à maîtriser la différence de base entre ces deux opérations de manière *significative* et *efficace*, c’est (a) de découvrir le lien entre les opérations d’addition et de soustraction, (b) de maîtriser les sommes liées et (c) de s’entraîner à utiliser ces connaissances intégrées jusqu’à ce que le processus devienne automatiques.[26,27] Comme l’indique la trajectoire d’apprentissage décrite dans la figure 2, pour parvenir à une telle maîtrise, le processus de développement du sens des nombres se fait progressivement et dès l’âge préscolaire.

- Comme nous l’avons vu précédemment, la reconnaissance verbale des nombres fournit une base qui favorise une compréhension informelle du fait que l’addition constitue un moyen d’augmenter le nombre d’objets dans une collection et la soustraction un moyen de diminuer ce nombre (concept 1 de la figure 2). Ces concepts informels liés à l’addition et à la soustraction fournissent une base pour la compréhension et la résolution (informelle) de problèmes exprimés sous forme d’énoncés ou d’expressions symboliques telles que « 7 - 4 » et d’équations telles que « 7 - 4 = ? ».
- La reconnaissance verbale des nombres peut également servir de base à des expériences d’inversion empirique, c’est-à-dire des situations dans lesquelles quelques objets sont ajoutés (ou retirés) d’une petite collection, puis où le même nombre d’objets est ensuite retiré (ou ajouté) pour que la collection retrouve son nombre initial. Ces expériences peuvent aider les enfants à découvrir le *concept d’annulation* : l’addition et la soustraction sont liées parce qu’en ajoutant puis en soustrayant le même nombre d’éléments ou vice versa, on conserve le nombre initial d’éléments (concept 2 de la figure 4). Ce concept informel d’annulation fournit une base pour comprendre les représentations formelles (écrites) du concept, telles que « 7 + 4 - 4 = 7 » et reconnaître le concept relatif aux nombres partagés (à savoir le fait que des équations telles que « 7 + 4 = 11 » et « 11 - 4 = 7 » sont liées et partagent les trois mêmes nombres ; concept 4 de la figure 2).
- La reconnaissance verbale des nombres peut également aider les enfants à développer des *concepts informels associés à la composition et à la décomposition* (concept 3 de la figure 2), qui constituent la base d’une vision plus formelle de l’addition et de la soustraction en tant que rapport « partie-tout » (concept 4 de la figure 2). Cela permet aux enfants d’imaginer que deux collections (ou « parties ») qui sont petites et proches peuvent être considérées comme une seule collection plus grande (ou « tout ») ou bien qu’une seule

collection plus grande peut constituer un tout formé de deux groupes plus petits (ou « parties »). Par exemple, le fait de voir un jet de dés affichant •• et •• comme un « deux » et un autre « deux » et de voir (ou d'entendre) un joueur plus âgé dire qu'il s'agit d'un « quatre » peut aider un enfant à comprendre que deux collections (plus petites) de « deux » peuvent être considérées comme des parties de la collection (plus grande) ou du tout « quatre », et que le tout « quatre » peut être décomposé en petites parties, à savoir « deux » et « deux ». En outre, le fait de considérer un jet de dés de • et de ••• comme un « un » et un « trois » *et aussi* comme un « quatre » au total peut aider les enfants à saisir que différentes combinaisons de collections ou de parties plus petites peuvent constituer le même nombre ou ensemble plus grand, ou bien qu'un ensemble peut être séparé en groupes ou parties plus petits. Une fois qu'ils ont appris à lire les nombres écrits, les enfants peuvent relier leurs connaissances informelles de la composition et de la décomposition à des expressions écrites telles que « 2 + 2 » ou « 1 + 3 » et à des équations écrites telles que « 2 + 2 = 4 » ou « 1 + 3 = 4 » et développer les concepts formels suivants :

- Plus précisément, les concepts informels de base de la composition et de la décomposition et les visions de type « partie-tout » peuvent servir de base à une interprétation formelle d'une équation d'addition telle que « 1 + 3 = 4 », car les parties 1 et 3 composent le grand tout 4 (par opposition à l'idée informelle selon laquelle une collection d'un seul élément est agrandie par l'ajout de trois autres) et « 4 - 3 = 1 », car le grand tout 4 est composé de la partie connue 3 et de la partie inconnue 1 (concept 5 de la figure 2 : connaissance formelle de l'addition et de la soustraction comme rapport « partie-tout »). Le fait d'envisager l'addition et la soustraction sous l'angle « partie-tout » permet de conclure que la soustraction d'une partie d'un tout laisse une partie plus petite que le tout.

- Avant même que les enfants développent une vision de type « partie-tout » formelle de l'addition et de la soustraction (concept 5 de la figure 2), le fait de leur inculquer des notions informelles associées à la composition et à la décomposition peut les aider à mieux comprendre et formaliser le *concept relatif aux nombres partagés*, à savoir comprendre que les expressions écrites « 1 + 6 », « 2 + 5 », « 3 + 4 », « 4 + 3 », « 5 + 2 » et « 6 + 1 » ont toutes la même somme (tout), soit 7, et inversement, que le nombre (tout) 7 peut également être représenté par les expressions « 1 + 6 », « 2 + 5 », « 3 + 4 », « 4 + 3 », « 5 + 2 » et « 6 + 1 ». Pour ces deux raisons, « 1 + 6 », « 2 + 5 », « 3 + 4 », « 4 + 3 », « 5 + 2 » et « 6 + 1 » forment une « famille de sommes ». Il est important de noter que la compréhension de ce concept peut conduire à reconnaître que les familles de sommes sont liées aux familles de différences et que tous les membres de la famille sont constitués des trois mêmes nombres (concept relatif aux nombres partagés, illustré en tant que concept 4 de la figure 2).

Comme l'indique la trajectoire d'apprentissage décrite dans la figure 2, l'approfondissement de la compréhension de l'opération de soustraction et de sa relation avec l'addition, qui renforce les fondements de la maîtrise des différences de base, peut être réalisé à l'école maternelle et en première année.

- Le *concept relatif aux nombres partagés* peut être souligné en utilisant des « triangles d'informations », comme dans le programme Everyday Mathematics (voir par exemple, la figure 3 ou, pour plus de détails, voir Baroody[26]).
- *La connaissance formelle de l'addition et de la soustraction en tant que rapport « partie-tout »* peut être encouragée, en partie, en désignant explicitement les éléments d'un triangle de faits comme un « tout » ou une « partie » (par exemple, en utilisant un astérisque pour indiquer le « tout » ou en parlant de l'équation « 3 + 4 = 7 » en indiquant que « la partie trois et la partie quatre font un total de sept »). Les rectangles de faits peuvent fournir une représentation relativement concrète des relations « partie-tout » (voir par exemple la figure 4 ou, pour plus de détails, Baroody[26]). La résolution d'énoncés de problèmes mettant en évidence le rapport « partie-tout » (voir par exemple la figure 5) peut également s'avérer utile.
- Mettre à la fois en avant le concept relatif aux nombres partagés et les connaissances formelles concernant le rapport « partie-tout » de manière intégrée peut favoriser la compréhension du *concept selon lequel les parties et le tout sont partagés* : Une famille d'opérations d'addition et de soustraction partage le même tout et les mêmes parties. Cette compréhension fournit une base pour reconnaître le principe de complément dont il est question dans le paragraphe suivant.

Comme le suggère la trajectoire d'apprentissage décrite dans la figure 2, les derniers éléments clés du développement de la stratégie de raisonnement par soustraction sous forme d'addition et de l'automatisation de cette stratégie peuvent maintenant être atteints en deuxième ou troisième année.

- *La maîtrise des sommes de base jusqu’à 18* peut grandement faciliter l’utilisation de la stratégie de soustraction sous forme d’addition pour raisonner consciemment, puis de façon automatique dans le cadre des opérations de soustraction.
- La découverte du *principe du complément*, une autre relation clé entre l’addition et la soustraction (par exemple, si les parties 5 et 3 forment le tout 8, alors le tout 8 moins la partie 3 donne la partie 5), peut fournir une base pour comprendre pourquoi la stratégie de l’addition sous forme de soustraction fonctionne et permettre aux enfants de mieux l’assimiler.
- La stratégie consistant à appréhender la soustraction sous forme d’addition peut devenir automatique grâce à la pratique et permettre de *maîtriser les différences jusqu’à 18*.

Figure 2: Trajectoire d’apprentissage pour le développement constructif d’un raisonnement fondé sur la stratégie de soustraction dite de « soustraction sous forme d’addition »

Image not found or type unknown

Figure 3. Triangle de familles d’opérations

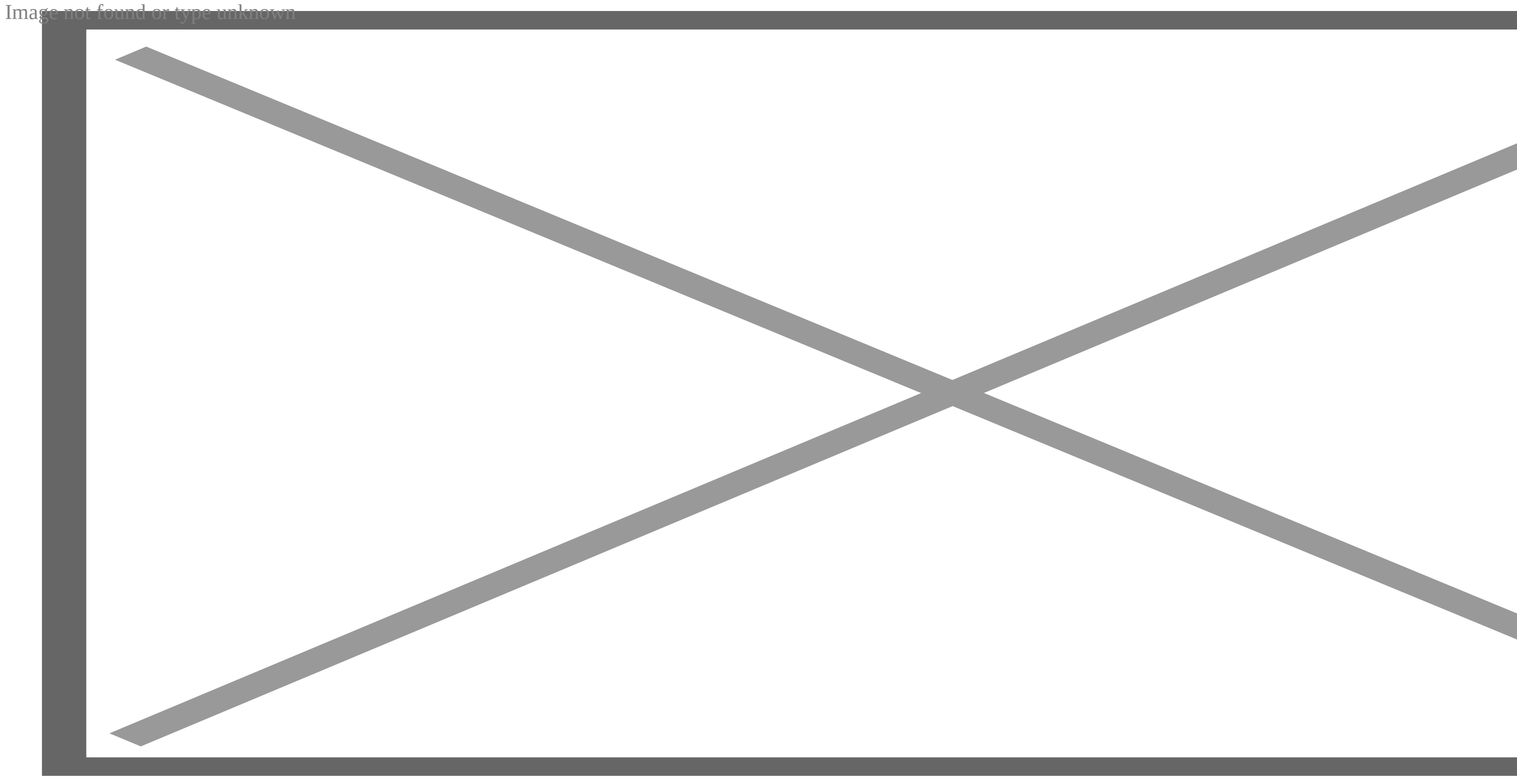


Figure 4. Rectangles d’informations

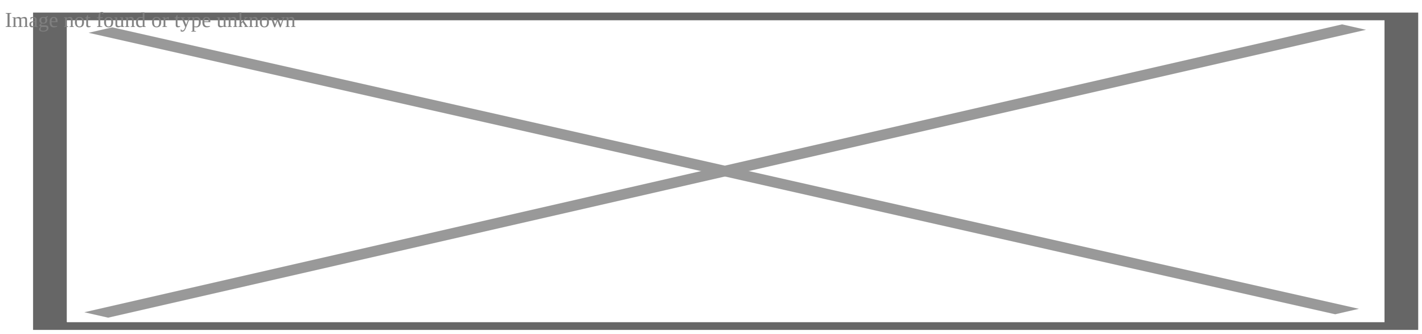
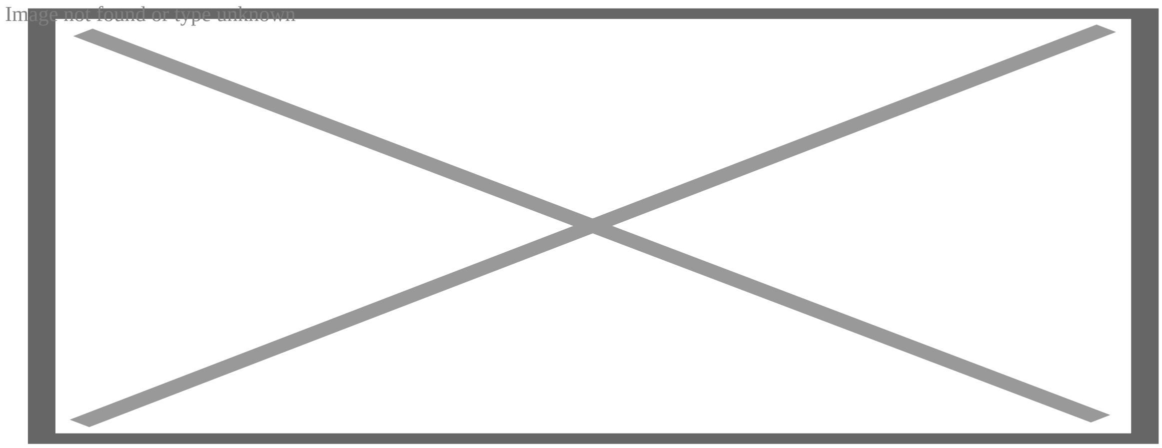


Figure 5 : Exemple d’énoncé de problème de type « partie-partie-tout »

Problème

Aza avait sept petits camions. Quatre étaient bleus et les autres étaient rouges. Combien de petits camions rouges avait Aza?

Illustration partie-partie-tout



Équation : 4 + ? = 7 or 7 – 4 = ?

Réponse : 3

Orientations futures

Il en reste encore beaucoup à apprendre concernant le développement des mathématiques chez les enfants d'âge préscolaire. L'aptitude à la reconnaissance verbale des nombres à deux ans permet-elle de prédire s'il sera prêt pour la maternelle la maternelle ou s'il réussira bien académiquement en mathématiques? Dans l'affirmative, une intervention ciblée sur les exemples et sur les contre exemples permet-elle aux enfants à risque d'échec scolaire de rattraper leurs camarades? Quels autres concepts ou quelles autres aptitudes, à l'âge de deux ou de trois ans, permettent de prédire s'il sera prêt pour la maternelle ou s'il réussira bien académiquement en mathématiques? Quelle est l'efficacité des programmes de mathématiques pour la petite enfance qui sont actuellement en cours de développement?

Conclusions

Contrairement aux convictions de certains éducateurs de la petite enfance, l'enseignement des mathématiques pour les enfants ayant aussi peu que deux ans est sensé.[22,28,30,31] Tel que l'illustre clairement la **figure 1**, l'enseignement doit commencer par aider les enfants à développer un concept cardinal des nombres intuitifs, ainsi que l'aptitude à reconnaître et à désigner des ensembles d'un à trois objets au moyen du nom du nombre approprié. Comme l'illustre également la figure 1, ces aspects de la connaissance des nombres sont des éléments clés pour la numératie par la suite et sont souvent absents chez les enfants présentant des déficiences en mathématiques.[32] Par exemple, bien que la mémorisation de l'opération de base qu'est la soustraction soit souvent problématique, voire difficile ou inaccessible pour de nombreux enfants, il peut en être autrement *si* l'enseignement aide les enfants à développer le sens des nombres en découvrant des régularités arithmétiques clés aux niveaux préscolaire et primaire. L'enseignement précoce ne signifie pas d'imposer des connaissances aux enfants d'âge préscolaire, de les faire répéter avec des cartes-éclair, ou de leur faire apprendre par cœur des procédés arithmétiques. L'encouragement de la perception des nombres et de la maîtrise des faits est axé sur le fait d'aider les enfants à découvrir les schémas et les relations et de les encourager à inventer leurs propres stratégies de raisonnement.

L'étude décrite a été partiellement financée par une subvention de la National Science Foundation (BCS-0111829), de la Spencer Foundation (Major Grant 200400033), des National Institutes of Health (1 R01 HD051538-01) et de l'Institute of Education Science (R305K050082 et R305A080479). La révision de ce rapport a été soutenue par des subventions de la National Science Foundation (1621470 et 2201939). Les opinions exprimées dans le présent manuscrit sont exclusivement celles de l'auteur et ne reflètent pas nécessairement la position ou les politiques des institutions susmentionnées ou ne bénéficient pas nécessairement de leur aval.

Références

1. Baroody AJ, Lai ML, Mix KS. The development of number and operation sense in early childhood. In: Saracho O, Spodek B, eds. *Handbook of research on the education of young children*. Mahwah, NJ: Erlbaum; 2006: 187-221.
2. Clements D, Sarama J, DiBiase AM, eds. *Engaging young children in mathematics: Standards for early childhood mathematics education*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates; 2004: 149-172.
3. Ginsburg HP, Klein A, Starkey P. *The development of children's mathematical knowledge: Connecting research with practice*. In: Sigel IE, Renninger KA, eds. *Child psychology in practice*. 5th Ed. New York, NY: Wiley & Sons; 1998; 401-476. Handbook of child psychology, vol 4.
4. Baroody AJ, Dowker A. The development of arithmetic concepts and skills: Constructing adaptive expertise. In: Schoenfeld A, ed. *Studies in mathematics thinking and learning series* . Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates; 2003.
5. Kilpatrick J, Swafford J, Findell B, eds. *Adding it up: Helping children learn mathematics.* Washington, DC: National Academy Press; 2001.

6. Baroody AJ, Bajwa NP, Eiland M. Why can’t Johnny remember the basic facts? *Developmental Disabilities Research Reviews* 2009;15(1):69-79. (Special issue on “Pathways to Mathematical Learning Disabilities,” guest edited by M. Mazzocco.) doi:10.1002/ddrr.45
7. Baroody AJ, Purpura DJ. Early number and operations: Whole numbers. In: Cai J, ed. *Compendium for research in mathematics education*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics; 2017:308-354.
8. Gersten R, Chard, D. Number sense: Rethinking arithmetic instruction for students with mathematical disabilities. *The Journal of Special Education* 1999;33(1):18–28.
9. Jordan NC. The need for number sense. *Educational Leadership*. 2007;65(2):63-66.
10. Dowker AD. *Individual differences in arithmetic: Implications for psychology, neuroscience and education*. Hove, England: Psychology Press; 2005.
11. Baroody AJ. The development of kindergartners' mental-addition strategies. *Learning and Individual Differences* 1992;4:215-235.
12. Baroody AJ, Eiland M, Thompson B. Fostering at-risk preschoolers' number sense. *Early Education and Development* 2009;20:80-120.
13. Mix KS, Sandhofer CM, Baroody AJ. Number words and number concepts: The interplay of verbal and nonverbal processes in early quantitative development. In: Kail R, ed. *Advances in child development and behavior, vol 33.* New York, NY: Academic Press; 2005: 305-346.
14. Baroody AJ, Li X, Lai ML. Toddlers’ spontaneous attention to number. *Mathematics Thinking and Learning* 2008;10:1-31.
15. Dehaene S. *The number sense*. New York, NY: Oxford University Press; 1997.
16. Wynn K. Numerical competence in infants. In: Donlan C, ed. *Development of mathematical skills.* Hove, England: Psychology Press; 1998:1-25.
17. Benoit L, Lehalle H, Jouen F. Do young children acquire number words through subitizing or counting? *Cognitive Development* 2004;19:291-307.
18. Paliwal V, Baroody AJ. Cardinality principle understanding: The role of focusing on the subitizing ability. *ZDM Mathematics Education* 2020;52(4):649-661. doi:10.1007/s11858-020-01150-0
19. Baroody AJ, Lai ML, Li X, Baroody AE. Preschoolers’ understanding of subtraction-related principles. *Mathematics Thinking and Learning* 2009;11:41-60.

20. Mazzocco M, Thompson R. Kindergarten predictors of math learning disability. *Learning Disabilities Research & Practice* 2005;20:142-155.

21. Baroody AJ, Coslick RT. *Fostering children's mathematical power: An investigative approach to K-8 mathematics instruction*. Mahwah, NJ: Erlbaum; 1998.

22. Baroody AJ, Rosu L. Adaptive expertise with basic addition and subtraction combinations: The number sense view. In: Baroody AJ, Torbeyns T. chairs. Developing Adaptive Expertise in Elementary School Arithmetic. Symposium conducted at: The annual meeting of the American Educational Research Association. April, 2006. San Francisco, CA.

23. Baroody AJ. Fostering early number sense. Keynote address at: The Banff International Conference on Behavioural Science. March, 2008. Banff, Alberta.

24. National Council of Teachers of Mathematics. *Curriculum focal points for prekindergarten through grade 8 mathematics*. Reston, VA: Author; 2006.

25. National Governors Association Center for Best Practices and Council of Chief State School Officers. *Common Core State Standards: Preparing America's students for college and career.*

26. Baroody AJ. Curricular approaches to introducing subtraction and fostering fluency with basic differences in grade 1. In: Bracho R, ed. *The development of number sense: From theory to practice. Monograph of the Journal of Pensamiento Numérico y Algebraico [Numerical and Algebraic Thought]* 2016;10(3):161–191. University of Granada.

27. Baroody A J, Purpura D J, Eiland MD, Reid EE, Paliwal V. Does fostering reasoning strategies for relatively difficult basic combinations promote transfer? *Journal of Educational Psychology* 2016;108: 576–591. doi: 10.1037/edu0000067

28. Baroody AJ, Li X. Mathematics instruction that makes sense for 2- to 5-year-olds. In: Essa EA, Burnham MM, eds. *Development and education: Research reviews from young children*. New York: The National Association for the Education of Young Children; 2009: 119-135.

29. Bredekamp S, Copple C. *Developmentally appropriate practice in early childhood programs.* Washington, DC: National Association for the Education of Young Children; 1997.

30. Copley J, ed. *Mathematics in the early years, birth to five*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics; 1999.

31. Copley J, ed. *The young child and mathematics.* Washington, DC: National Association for the Education of Young Children; 2000.

32. Landerl K, Bevan A, Butterworth B. Developmental dyscalculia and basic numerical capacities: A study of 8–9-year-old students. *Cognition* 2004;93:99-125.

Enseignement des mathématiques aux enfants d'âge préscolaire

Jody L. Sherman-LeVos, Ph.D.

University of California, Berkeley, États-Unis

Décembre 2010

Introduction

L'enseignement des mathématiques à de jeunes enfants (EMJE) avant leur entrée à l'école primaire n'est pas une pratique nouvelle. En fait, cet enseignement existe sous diverses formes depuis des centaines d'années.[1] Ce qui a changé au cours du temps, ce sont les opinions quant aux raisons qui justifient l'importance de l'EMJE, aux buts que cet enseignement devrait chercher à atteindre et à la forme sous laquelle l'enseignement des mathématiques à un si jeune public doit se faire, s'il doit se faire.

Sujet et contexte de la recherche

L'EMJE est-il nécessaire?

Plusieurs experts de l'enfance, y compris des éducateurs et des chercheurs, sont préoccupés par la tendance récente à étendre l'éducation scolaire aux plus jeunes.[2] Cette tendance se manifeste par l'application aux niveaux préscolaires de programmes qui étaient réservés officiellement aux enfants d'âge scolaire, accompagnée du focus sur les résultats obtenus aux évaluations[3] qui leur est caractéristique. Ce qui motive cette extension des programmes semble être d'ordre largement politique, l'accent étant de plus en plus mis sur la réussite précoce, l'amélioration des résultats aux tests et la réduction des écarts entre des minorités spécifiques et des groupes socioéconomiques.[4]

Malgré l'inquiétude générale liée à l'extension des programmes de niveau scolaire vers le niveau préscolaire, certains facteurs convaincants encouragent la présence d'au moins certains types d'enseignement des mathématiques pour les enfants d'âge préscolaire, du moins pour certains groupes de ces enfants. Comme l'indiquent Ginsburg et coll., apprendre les mathématiques est « une activité « naturelle » et qui convient aux jeunes enfants d'un point de vue développemental ».[1] De nombreux enfants élaborent des concepts simples sur l'espace, les quantités, les tailles, les motifs géométriques et les opérations par leurs interactions quotidiennes avec le monde. Malheureusement, tous les enfants n'ont pas les mêmes opportunités de bâtir ces concepts mathématiques informels mais fondateurs dans leurs vies quotidiennes. Ainsi, et parce que l'équité constitue un aspect extrêmement important de l'enseignement des mathématiques, l'EMJE paraît particulièrement pertinent pour les enfants qui appartiennent à des groupes marginalisés,[3] tels que les enfants qui ont des besoins particuliers, ceux qui apprennent la langue nationale comme langue supplémentaire (par ex. par la méthode « English-as-additional-language [EAL] ») et les enfants dont le statut socio-économique est faible et le foyer instable ou négligent.[4]

Résultats récents de la recherche

L'équité en matière d'éducation est un argument majeur en faveur de la présence de l'EMJE, mais un aspect qui est intimement lié à l'équité est le fait d'aider les jeunes esprits mathématiques à passer des concepts informels aux concepts formels des mathématiques, des concepts qui ont des noms, des principes et des règles. Le développement des concepts mathématiques chez les enfants se construit souvent à partir d'expériences informelles. On peut le représenter par des trajectoires d'apprentissage[5] qui mettent en relief la façon dont les compétences spécifiques en mathématiques se forment à partir des expériences antérieures et renseignent sur les étapes à venir. Par exemple, apprendre les noms, l'ordre et les quantités des « nombres intuitifs » un, deux et trois, reconnaître ces valeurs comme étant des ensembles d'objets et désigner les nombres par des mots ou comme des parties d'ensembles (p.ex., trois peut être formé de 2 et 1 ou de 1 + 1 + 1), peuvent aider les enfants à développer une compréhension des opérations simples.[6] Le fait de «mathématiser», ou d'offrir des expériences mathématiques adéquates en les enrichissant avec un vocabulaire mathématique, peut aider à relier la curiosité naturelle et précoce des enfants et leurs observations au sujet des mathématiques aux concepts qui seront vus plus tard à l'école.[3] Les résultats probants obtenus par les chercheurs leur permettent de suggérer que le raisonnement mathématique apparaît très tôt[1,6,7] et que l'EMJE peut aider les enfants à formaliser les concepts et à les relier à des concepts apparentés, tout en fournissant le vocabulaire et les systèmes de symboles nécessaires à la communication et à la traduction des mathématiques (voir en exemple l'article de Baroody).[6]

Il est possible que les raisons qui rendent l'EMJE important dépassent l'équité et la mathématisation. En analysant six études longitudinales, Duncan et coll.[8] ont découvert que les compétences en mathématiques des enfants lors de l'entrée à l'école prédisent plus fortement la performance académique ultérieure que les compétences attentionnelles, socio-émotionnelles ou en lecture. De la même façon, des difficultés précoces dans l'apprentissage des concepts mathématiques de base peuvent avoir des conséquences qui persisteront pendant toute la scolarité des enfants. Étant donné que les compétences en mathématiques sont particulièrement importantes pour participer de façon productive au monde moderne (Plata L, données non publiées, 2006)[9] et que des domaines mathématiques particuliers, tels que l'algèbre, peuvent ouvrir les portes de l'enseignement supérieur et élargir le choix de carrières,[10] l'accès à des expériences en mathématiques précoces, équitables et appropriées est d'une importance cruciale pour tous les jeunes enfants.

Qu'est-ce qu'un EMJE « adéquat »?

Les opinions diffèrent quant aux buts que devrait atteindre l'EMJE, sa composition et la façon dont on devrait l'intégrer dans la vie des enfants d'âge préscolaire. La quantité d'interventions ou d'enseignement proposée varie sur un continuum. Ce continuum présente à l'une de ses extrémités une approche de l'EMJE didactique, très directe et centrée sur l'enseignant et à l'autre extrémité, une approche non didactique, axée sur le jeu et centrée sur l'enfant.[4] Il est possible que chaque enfant et peut-être que différents groupes d'enfants puissent bénéficier des divers niveaux d'instruction sur le continuum; de nombreuses recherches sont encore à faire afin de mieux comprendre quelles sont les meilleures façons d'enseigner tous les aspects des mathématiques à tous les enfants. Le « Building Blocks » est un exemple de programme d'apprentissage des mathématiques destiné aux jeunes enfants qui est basé sur la recherche. Il s'agit d'un programme conçu pour soutenir et améliorer le développement de la pensée mathématique des enfants (c.-à-d., leurs trajectoires d'apprentissage) par les jeux vidéo, l'utilisation d'objets usuels (c.-à-d., d'objets que l'on peut manipuler, tels que des cubes) et l'écriture.[11] Le projet Building Blocks représente une tentative d'aligner le contenu et les activités pédagogiques avec les trajectoires d'apprentissage dans les domaines bien étudiés tels que le comptage. On ne comprend pas encore très bien les trajectoires d'apprentissage pour d'autres domaines tels que la création de motifs géométriques et les mesures.[5]

Ginsburg et coll.[1] ont décrit six composantes qui devraient faire partie de toutes les formes d'EMJE (p.ex., des programmes tels que le Building Blocks) : l'environnement, le jeu, l'enseignement spontané, des projets, un programme d'études et l'enseignement intentionnel. Par exemple, quel que soit l'endroit du continuum didactique-ludique où se situe un programme particulier de mathématiques, l'environnement est une composante vitale de l'éducation précoce. Précisément, le fait de fournir aux enfants d'âge préscolaire des matériaux qui inspirent la pensée mathématique, tels que des cubes, des formes et des casse-têtes, peut faciliter le développement des compétences de base telles que la création de motifs géométriques, le savoir faire des comparaisons et la numératie précoce. Une autre composante importante est celle de l'enseignement spontané. Celui-ci consiste à reconnaître et capitaliser sur les découvertes spontanées des enfants dans le domaine des mathématiques en posant des questions qui nécessitent que les enfants réfléchissent pour y répondre, en fournissant du vocabulaire et le support pour le représenter et en suggérant des activités qui prolongent l'enseignement en donnant plus de détails et en soutenant davantage les idées mathématiques.

Selon les articles publiés actuellement, le jeu serait la composante la plus populaire de l'EMJE. De nombreux partisans de l'apprentissage par le jeu prétextent que les enfants apprennent beaucoup lorsqu'ils découvrent d'eux-mêmes des idées mathématiques dans des situations naturelles ou minimalement forcées.[12,13] Certains avancent que le jeu disparait dans les écoles pré-maternelles en réaction à l'extension vers le bas de l'éducation scolaire et des examens.[14] Ces mêmes auteurs fournissent des données indiquant que les enfants, pendant leurs premières années d'études (y compris ceux qui fréquentent les garderies), passent actuellement beaucoup plus de temps à préparer des examens qu'à pratiquer des activités axées sur le jeu.[4] Il semble même que de nombreux jouets éducatifs soient conçus davantage pour favoriser un apprentissage précoce des concepts académiques (c.-à-d., la littératie pour les trottineurs) que pour l'apprentissage par le jeu en soi. Les opinions des parents sur l'importance de l'éducation précoce pour la réussite académique ultérieure sont peut-être en partie responsables de cette approche. Beaucoup de recherches restent à faire sur l'impact des jouets éducatifs, de la technologie, du jeu (ou de son manque) et des divers programmes d'EMJE sur le développement mathématique des enfants d'âge préscolaire.

Lacunes de la recherche et implications

Quels sont les obstacles à une éducation précoce efficace?

Plusieurs facteurs compliquent l'enseignement des mathématiques aux enfants d'âge préscolaire, y compris la pression politique (c.-à-d., les résultats scolaires, le financement, les diverses normes des programmes), les différences individuelles parmi ces enfants (c.-à-d. que, sur le plan individuel, les enfants pourraient profiter de différentes possibilités en matière de mathématiques), les différences idéologiques concernant l'éducation (c-à-d. le continuum didactique-ludique) et les lacunes de la recherche sur le développement (c.-à-d., les trajectoires d'apprentissage peu documentées pour certains concepts mathématiques). D'autres obstacles compliquent l'EMJE en affectant la mise en œuvre de l'enseignement des mathématiques (quel que soit le curriculum), tels que les craintes des enseignants ou leurs idées fausses sur les mathématiques. Malheureusement, de nombreux éducateurs en milieu préscolaire n'ont pas suivi de formation directement reliée aux mathématiques à l'intention des jeunes enfants (Plata L., données non publiées, 2006). Les enseignants doivent être au fait de ce que savent les enfants, connaître la façon dont les enfants apprennent de nouveaux concepts, connaître la plupart des stratégies d'enseignement efficaces ainsi que les concepts mathématiques eux-mêmes (Plata L., données non publiées, 2006).[3] Améliorer les possibilités de formation en mathématiques des éducateurs en milieu préscolaire pourrait aider à offrir un meilleur enseignement en mathématiques aux jeunes enfants, tant sur le plan qualitatif que quantitatif.

Conclusion

Le débat autour de l'EMJE ne semble pas porter sur la possibilité que l'exposition précoce aux expériences et aux idées mathématiques soit importante; selon le consensus général, elle est importante. La question est plutôt de savoir comment, quand, pourquoi et pour qui devraient être présentées des approches particulières de l'EMJE. Les opinions divergent en ce qui concerne le jeu libre versus l'enseignement structuré, ou un curriculum particulier versus des occasions d'enseignement spontané. Malgré tout, comme les données probantes concernant le développement des idées mathématiques chez les très jeunes enfants (c.-à-d., les trajectoires d'apprentissage) s'accumulent, les tentatives d'aligner le développement cognitif avec les meilleures pratiques en matière d'enseignement (ou avec les meilleurs environnements pour favoriser les découvertes mathématiques naturelles) pourraient aider à ouvrir la voie à des expériences mathématiques équitables et appropriées pour tous les enfants d'âge préscolaire.

Références

1. Ginsburg HP, Lee JS, Boyd JS. Mathematics education for young children: What it is and how to promote it. *Social Policy Report* 2008;223-23.
2. Elkind D. Foreword. In: Miller E, Almon J, eds. *Crisis in the kindergarten: Why children need to play in school*. College Park, MD: Alliance for Childhood; 2009: 9.
3. Clements DH. Major themes and recommendations. In: Clements DH, Sarama J, DiBiase A, eds. *Engaging young children in mathematics: Standards for early childhood mathematics education*. Mahwah, NJ: Erlbaum; 2004: 7-72.
4. Miller E, Almon J, eds. *Crisis in the kindergarten: Why children need to play in school*. College Park, MD: Alliance for Childhood; 2009:1-72.

5. Clements DH, Sarama J. Learning trajectories in early mathematics – sequences of acquisition and teaching. *Encyclopedia of Language and Literacy Development*. London, ON: Canadian Language and Literacy Research Network; 2009: 1-7.
6. Baroody AJ. Fostering early numeracy in preschool and kindergarten. *Encyclopedia of Language and Literacy Development*. London, ON: Canadian Language and Literacy Research Network; 2009: 1-9.
7. Sophian C. Numerical knowledge in early childhood. In: Tremblay RE, Barr RG, Peters RDeV, Boivin M, eds. *Encyclopedia on Early Childhood Development* [online]. Montreal, Quebec: Centre of Excellence for Early Childhood Development; 2009:1-7.
8. Duncan GJ, Dowsett CJ, Claessens A, Magnuson K, Huston AC, Klebanov P, Pagani LS, Feinstein L, Engel M, Brooks-Gunn J, Sexton H, Duckworth K, Japel C. School readiness and later achievement. *Developmental Psychology* 2007;43:1428-1446.
9. Baroody AJ, Lai M, Mix KS. The development of young children's early number and operation sense and its implications for early childhood education. In: Spodek B, Olivia S, eds. *Handbook of research on the education of young children*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc; 2006:187-221.
10. Knuth EJ, Alibali MW, McNeil NM, Weinberg A, Stephens AC. Middle school students' understanding of core algebraic concepts: Equality and variable. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* 2005;37:1-9.12.
11. Sarama J. Technology in early childhood mathematics: Building Blocks as an innovative technology-based curriculum. In: Clements DH, Saram J, DiBiase A, eds. *Engaging young children in mathematics: Standards for early childhood mathematics education*. Mahwah, NJ: Erlbaum; 2004: 361-375.
12. Polonsky L, Freedman D, Lesher S, Morrison K. *Math for the very young: A handbook of activities for parents and teachers*. New York, NY: John Wiley & Sons; 1995.
13. Seo K, Ginsburg HP. What is developmentally appropriate in early childhood mathematics education? Lesson from new research. In: Clements DH, Saram J, DiBiase A, eds. *Engaging young children in mathematics: Standards for early childhood mathematics education*. Mahwah, NJ: Erlbaum; 2004: 91-104.
14. Hirsh-Pasek K, Golinkoff RM, Berk LE, Singer DG. *A mandate for playful learning in preschool: Presenting the Evidence*. Oxford, UK: University Press; 2009