

## NUMÉRATIE

---

# Numératie chez le jeune enfant : transition des premiers mois aux premières années de vie

**Kelly S. Mix, Ph.D.**

University of Maryland, États-Unis

Décembre 2023, Éd. rév.

### Introduction

Dès l'âge préscolaire, la plupart des enfants montrent un éventail de compétences en calcul, y compris des aptitudes verbales, comme le comptage, et des compétences non verbales telles que la reconnaissance de l'équivalence d'ensembles d'objets.<sup>1,2,3,4,5</sup> Bien que les chercheurs conviennent de l'existence de ces capacités dès la petite enfance, ils ne s'entendent pas encore sur le moment où celles-ci se manifestent ni sur les mécanismes qui les sous-tendent. Autrement dit, quelles sont les origines des compétences numériques verbales et non verbales chez le jeune enfant?

### Sujet

Jusqu'à récemment, les recherches sur la numératie portaient principalement sur le comptage verbal. Or, l'idée selon laquelle la numératie pourrait se manifester chez le nourrisson et le très

jeune enfant a amené les chercheurs à prêter davantage attention aux concepts qui peuvent être mesurés de manière non verbale. Ce changement de cap a élargi l'éventail des comportements considérés comme des manifestations de la numératie chez le jeune enfant, ce qui a eu une incidence directe sur l'évaluation et l'éducation des jeunes enfants. En outre, cette nouvelle perspective a soulevé des questions sur les origines des troubles d'apprentissage en mathématiques et les écarts dans les résultats en mathématiques.

## Problèmes

La plupart des enfants acquièrent les compétences de base en matière de nombres symboliques avant l'âge de 5 ans, notamment en récitant les nombres jusqu'à 20 ou plus,<sup>1,2,4</sup> en utilisant l'énumération pour désigner des ensembles,<sup>1,2,4,5</sup> en comprenant que le dernier mot du compte des éléments effectué représente la valeur de l'ensemble (principe du nombre cardinal),<sup>1,2,5,6</sup> en reconnaissant les chiffres écrits<sup>5</sup> et en définissant l'ordinalité des nombres à un seul chiffre.<sup>7</sup> Il a également été démontré que les enfants peuvent interpréter des nombres à plusieurs chiffres à partir de l'âge de 3 ans, en jugeant correctement, par exemple, lequel de deux nombres à plusieurs chiffres est le plus grand.<sup>8,9</sup>

Avant de maîtriser les compétences symboliques, les enfants d'âge préscolaire comprennent également les relations quantitatives sur la base de mesures non verbales. Ils sont notamment capables de déterminer des ensembles d'objets équivalents,<sup>10</sup> d'effectuer des calculs simples avec des objets<sup>11</sup> ou d'indiquer lequel de deux nuages de points en compte le plus.<sup>12</sup> Les enfants effectuent des tâches liées aux nombres axées sur des objets avant de montrer une compréhension similaire au moyen de tâches faisant appel aux habiletés verbales. Par exemple, les enfants d'âge préscolaire résolvent de simples problèmes d'addition et de soustraction s'appliquant à des objets (p. ex.,  $2 + 2$ ) des années avant de pouvoir résoudre des problèmes semblables exprimés en mots.<sup>11,13</sup> De même, les enfants déterminent le rang ou l'ordre et l'équivalence dans des tâches à choix forcé avant de pouvoir comparer les mêmes ensembles verbalement, en les comptant, les compétences non verbales apparaissant entre deux ans et demi et trois ans.<sup>11,14,15</sup>

L'un des principaux objectifs de la recherche a été de comprendre les origines développementales de ces conceptions non verbales des nombres. Il a été démontré grâce à des méthodes d'habituation et de regard préférentiel que les nourrissons sont également sensibles à la quantité<sup>16,17</sup> et certaines études ont même démontré cette sensibilité chez les nouveau-nés.<sup>18,19</sup> Diverses

propositions ont établi un lien entre les variations individuelles de cette sensibilité précoce et les résultats futurs en matière de calcul et de mathématiques. Toutefois, des questions restent en suspens concernant les représentations qui sous-tendent cette sensibilité précoce, la manière dont les représentations elles-mêmes se développent et le rôle qu'elles peuvent jouer dans le développement ultérieur.

## **Contexte de la recherche**

L'un des procédés à l'origine de représentation non verbale précoce des nombres est le système numérique approximatif, ou SNA. Il s'agit d'une représentation proposée pour sous-tendre la discrimination de différentes tailles d'ensembles, en particulier de grands ensembles (p. ex., 16 contre 32).<sup>20,21</sup> Bien que l'on pense que le SNA concerne des nombres discrets, cela est également inexact et dépend des rapports, comme les dimensions non numériques telles que la surface, ce qui signifie que les quantités sont plus faciles à distinguer lorsque leur rapport est plus élevé (p. ex., 16 est plus facile à distinguer de 32 que de 24).<sup>22</sup> On considère que le SNA est inné, car même les nouveau-nés réagissent à des variations de taille d'ensembles, tant que les rapports sont suffisamment grands.<sup>19</sup> Toutefois, la recherche montre également que le SNA se précise avec l'âge et au fil de la scolarité.<sup>23,24,25,26</sup>

Une autre proposition de représentation non verbale des nombres est basée sur l'individuation des objets, également décrite comme le suivi des objets, les modèles mentaux ou le « subitizing », soit la perception immédiate des unités (p. ex., 1 à 4 objets).<sup>11,21,27,28</sup> Selon ces explications, les enfants représentent incidemment le nombre lorsqu'ils différencient les objets dans une scène et suivent les mouvements et les positions spatiales des objets. Les limites de taille concernant l'individuation des objets peuvent s'expliquer par des contraintes relatives à la mémoire de travail<sup>29</sup> ou l'attention.<sup>27</sup> Certains chercheurs ont soutenu que, comme le SNA, les représentations basées sur les objets sont innées, le débat se poursuivant sur la question de savoir si les deux systèmes sont distincts,<sup>11,30</sup> ou simplement des démonstrations différentes d'un même système de représentation primitif du point de vue de l'évolution.<sup>31</sup> D'autres encore ont suggéré que les représentations basées sur les objets pourraient émerger d'expériences d'observation et de manipulation d'objets sans nécessairement découler d'un système de quantification inné.<sup>32</sup>

Un troisième facteur contribuant à l'apprentissage précoce de la numératie est l'exposition aux mots-nombres et au système de comptage verbal. Avant la recherche sur la quantification chez le nourrisson, les recherches fondamentales de Piaget suggéraient que les enfants n'avaient pas de

compréhension conceptuelle des relations quantitatives jusqu'à ce qu'ils aient maîtrisé le comptage conventionnel,<sup>33</sup> et des études montraient que les enfants ne comprenaient pas les principes du calcul jusqu'à ce qu'ils aient maîtrisé les méthode de comptage.<sup>34,35</sup> Bien que des recherches ultérieures aient montré que les enfants qui ne savaient pas compter comprenaient beaucoup plus de choses sur les quantités que ce qu'affirmait Piaget, la compréhension des nombres symboliques reste un facteur prédictif important des résultats futurs en mathématiques.<sup>36,37,38,39,40</sup> Il s'agirait même d'un prédicteur plus fort que les compétences de quantification non verbales.<sup>41,42,43,44</sup> La recherche a également suggéré que les enfants peuvent extraire des informations sur les nombres et leur signification à partir des symboles numériques eux-mêmes, montrant par exemple que les enfants d'âge préscolaire peuvent faire correspondre des nombres écrits à plusieurs chiffres à des mots-nombres à plusieurs chiffres et comparer l'ordre de grandeur de nombres écrits à plusieurs chiffres, indépendamment des résultats obtenus à l'aide de mesures non verbales.<sup>9</sup>

## **Questions clés de la recherche**

La plupart des chercheurs s'accordent à dire que les enfants réagissent aux changements de nombres dès le plus jeune âge par des processus non verbaux. En outre, les étapes de l'acquisition verbale des nombres font l'objet d'un consensus général. Les recherches actuelles se concentrent désormais sur la nature sous-jacente de la quantification non verbale et les chercheurs se demandent si la variation des processus non verbaux est liée aux résultats futurs en mathématiques. Dans le cadre de cette étude, les chercheurs travaillent également à déterminer si les enfants passent de la quantification verbale à la quantification non verbale au fur et à mesure de leur apprentissage.<sup>45</sup> Enfin, la recherche s'intéresse de plus en plus à l'environnement de la numératie verbale à la maison et à l'école maternelle, et à son lien avec les résultats futurs de l'enfant.

## **Résultats récents de la recherche**

### *Discrimination précoce des nombres et dimensions quantitatives non numériques*

Une question fait encore débat : les réactions des nourrissons aux changements quantitatifs sont-elles basées sur la conscience d'un nombre discret *proprement dit* ou sur l'une des nombreuses variables perceptives qui sont en corrélation avec un nombre discret, telles que la surface, l'enveloppe convexe, la luminosité, la durée, la densité temporelle et la fréquence spatiale?<sup>46,47,48</sup>

Les chercheurs ont tenté de contrôler ces variables perceptives afin d'évaluer plus précisément la sensibilité numérique,<sup>24,49,50</sup> mais comme d'autres l'ont souligné,<sup>46,47</sup> il est difficile de contrôler toutes les variables simultanément. Certains chercheurs ont donc suggéré que les recherches futures devraient se concentrer sur les moyens de prendre en compte les réponses non numériques plutôt que d'essayer de les contrôler.<sup>46,50,51</sup> Il n'a donc pas encore été déterminé si la sensibilité quantitative des nourrissons est basée sur le nombre discret, comme certains l'ont affirmé, ou sur une combinaison d'autres informations perceptives qui sont en corrélation avec le nombre discret. Des questions similaires se posent dans les recherches visant à déterminer si les nourrissons réagissent aux changements de quantité entre les dimensions, par exemple en apprenant à associer certains modèles visuels à des ensembles numériques plus ou moins grands et en transférant cette association à des objets de taille différente,<sup>52</sup> ou en s'attendant à ce que si des paires quantitatives (p. ex., le nombre et l'étendue spatiale) augmentent ou diminuent, elles changent toutes deux dans la même direction.<sup>18</sup> Ces recherches ont conduit à la proposition selon laquelle la quantification découle d'une représentation généralisée de la magnitude. Cette représentation est une façon de caractériser un sens indifférencié de la quantité basé sur de multiples flux d'informations, mais l'affirmation selon laquelle les enfants peuvent passer d'un indice quantitatif à un autre nécessiterait des contrôles permettant d'isoler efficacement chaque indice.

### *Établir des connexions*

La recherche a montré comment les enfants acquièrent plusieurs compétences distinctes en matière d'énumération verbale (p. ex., le comptage, la cardinalité, l'ordinalité), ainsi que la façon dont ils représentent les quantités de manière non verbale. Cependant, pour parvenir à une conception cohérente des nombres, les enfants doivent ultimement établir des liens entre ces compétences et ces représentations (p. ex., les mots numériques verbaux, les quantités physiques, les modèles mentaux).<sup>43,53,54,55,56,57</sup> Les mots associés aux petits chiffres peuvent jouer un rôle essentiel dans les premières représentations des enfants parce que les quantités 1, 2 et 3 peuvent être immédiatement perçues et représentées de manière non verbale avec moins d'erreurs que les représentations de quantités plus importantes. Ainsi, les petits ensembles peuvent offrir des référents perceptuels clairs qui peuvent être associés à un mot.<sup>28,58,59,60</sup>

Une fois que les mots faisant référence aux petits ensembles ont été appris, les enfants sont en mesure de remarquer que les mêmes mots sont utilisés pour nommer et pour compter, découvrant ainsi le principe cardinal (CWP, pour *Cardinal Word Principle*), c'est-à-dire l'idée que le

dernier mot nombre prononcé désigne le cardinal de l'ensemble. En l'absence d'enseignement ciblé, la plupart des enfants maîtrisent naturellement le principe de cardinalité à l'âge de 4 ans, mais des études ont montré que le principe de cardinalité peut être induit par la pratique du nommage de petits ensembles ainsi que par un enseignement qui juxtapose le comptage et le nommage.<sup>28,61</sup> Dans le cadre de l'étude « reconnaître  $n$  », la connaissance du principe de cardinalité a été mesurée à l'aide de la tâche « donne-moi  $n$  » (p. ex., « Donne-moi 5 pions. »). Les premiers résultats de la recherche suggèrent que les enfants apprennent les correspondances entre les nombres et les quantités un par un et dans l'ordre, avant de faire le lien entre le comptage et la cardinalité, qui est lui-même suivi d'une généralisation logique rapide du principe de cardinalité à tous les nombres compris dans la plage de comptage de l'enfant.<sup>45,62,5</sup> Cependant, des études par journal de bord ont fait état d'une utilisation correcte des mots associés aux petits nombres dans certains contextes encore plus tôt, ainsi que de preuves que les enfants peuvent acquérir le sens des nombres dans un ordre différent.<sup>63,64</sup> En outre, des études récentes ont soulevé des questions sur la validité des performances dans le cadre de la tâche « donne-moi  $n$  » et sur la signification des classifications des connaissances de  $n$  basées sur ces performances.<sup>65,66,67,68</sup> Ainsi, bien que l'on ait beaucoup appris sur ces connexions importantes, des questions clés restent en suspens.

### *Facteurs prédictifs précoces des résultats en mathématiques*

L'existence d'une sensibilité au quantitatif dans la petite enfance a incité les chercheurs à examiner le lien entre cette sensibilité et l'acquisition de la numération verbale dans la petite enfance, et les résultats en mathématiques à l'école. Certains ont soutenu que le SNA fournit une base de représentation pour l'acquisition de compétences ultérieures en calcul symbolique et en mathématiques.<sup>21,45</sup> Par ailleurs, des études longitudinales établissant un lien entre l'acuité du SNA pendant la petite enfance et la période préscolaire et les réalisations ultérieures en mathématiques pendant l'enfance et l'adolescence semblent étayer cette affirmation.<sup>69,70,71,72</sup> Cependant, d'autres études examinant les associations longitudinales et simultanées n'ont pas réussi à trouver de preuves reliant l'acuité du SNA à la réussite en mathématiques<sup>73,74,75,76,77</sup> et d'ailleurs, des preuves de plus en plus nombreuses sur les plans neurologique et comportemental suggèrent qu'il existerait des mécanismes distincts.<sup>12,26,78</sup> Enfin, lorsque les enfants acquièrent des compétences en calcul symbolique, l'acuité du SNA s'améliore simultanément, peut-être en conséquence.<sup>25,79</sup> Ainsi, le SNA et les compétences en mathématiques symboliques auraient une relation de causalité, ce lien pourrait commencer avec le nombre symbolique pour aller vers le

SNA plutôt que l'inverse, voire peut-être aller dans les deux sens.

Des tendances similaires ont été rapportées pour la focalisation spontanée sur les nombres (*spontaneous focusing on number* ou SFON), c'est-à-dire la tendance des enfants à remarquer les nombres exacts dans leurs expériences quotidiennes.<sup>80</sup> Les tests de focalisation spontanée sur les nombres sont élaborés de sorte à éviter les indices verbaux, pour exploiter l'attention autodirigée des enfants sur la numération, mais comme les enfants de ces études sont généralement d'âge préscolaire ou plus âgés,<sup>80,81</sup> nous ne savons pas si le mécanisme de focalisation spontanée sur les nombres se traduit par la quantification non verbale (p. ex., l'individuation des objets), le comptage verbal ou les deux à la fois. Des études corrélationnelles concomitantes indiquent de fortes associations entre les tendances de SFON et la numératie verbale,<sup>80,82</sup> et d'autres études longitudinales démontrent que la performance lors des tâches mesurant la focalisation spontanée sur les nombres dans la petite enfance est corrélée avec la connaissance des nombres symboliques à l'école primaire.<sup>83,84</sup> Cependant, alors que la SFON et la numératie symbolique prédisent toutes deux les résultats futurs en mathématiques, la performance sur les tâches liées aux nombres symboliques est le prédicteur le plus fiable.<sup>85</sup> En outre, les tentatives d'amélioration de la SFON se sont montrées efficaces lorsque les interventions comprenaient des activités liées aux nombres symboliques,<sup>86,87</sup> ce qui suggère que la focalisation spontanée sur les nombres peut être motivée par l'acquisition de la numératie symbolique, plutôt que l'inverse. Des recherches supplémentaires utilisant des interventions basées sur des activités non verbales sont nécessaires pour tirer des conclusions définitives, mais la numération symbolique précoce reste le prédicteur le plus clair et le plus fort des résultats futurs en mathématiques.

### *La numératie en milieu familial*

L'acquisition des premières compétences en calcul des enfants a lieu en grande partie dans le foyer familial, c'est pourquoi les activités liées aux nombres des enfants et de leurs proches ont fait l'objet d'une attention croissante.<sup>88,89</sup> La plupart des recherches sur ce sujet ont utilisé soit le rapport des parents sur les activités liées aux nombres,<sup>90,91,92,93,94</sup> soit le codage du discours des parents à partir d'observations directes.<sup>95,96,97</sup> Les études ont démontré une association entre la fréquence des activités liées aux nombres à la maison, d'après les parents, et les résultats des enfants en matière de calcul,<sup>90,91</sup> bien que cette association n'ait pas toujours été possible.<sup>89,92,93</sup> Les études existantes indiquent également que même si les parents parlent rarement des nombres,<sup>95</sup> même lorsque les activités sont conçues pour susciter de telles discussions,<sup>60,97</sup> il existe des associations significatives entre la fréquence des discussions fortuites sur les nombres et les

résultats des enfants en matière de numératie.<sup>90,95,96,97,98</sup> Les résultats des enfants ont également été liés à la variation des différences qualitatives, telles que la durée de la conversation,<sup>99</sup> et le fait de se concentrer sur des ensembles de grande taille (p. ex., 4 à 10) ou des concepts avancés tels que la cardinalité.<sup>97,100,101</sup> Quelques études d'observation portant sur la petite enfance ont démontré que le discours parental sur les nombres existe dès les plus jeunes âges observés à ce jour (c'est-à-dire entre 12 et 14 mois).<sup>95,96</sup> Ainsi, bien que les nourrissons soient eux-mêmes non verbaux, leur compréhension émergente de la numération peut être façonnée par une exposition précoce à la numération verbale.<sup>32</sup>

## **Lacunes de la recherche**

Bien que la recherche ait apporté de nombreuses réponses sur les changements développementaux de diverses aptitudes quantitatives, telles que le principe cardinal, la SFON et les discriminations non verbales de la taille d'un ensemble, nous n'en savons pas suffisamment sur les mécanismes à l'origine de ces changements, et en particulier sur les mécanismes par lesquels les enfants établissent des liens entre divers concepts et représentations pour parvenir à une perception cohérente des nombres. Ainsi, des recherches supplémentaires sont nécessaires pour tester expérimentalement les mécanismes proposés et recueillir des données cohérentes avec les hypothèses relatives au mécanisme de développement. Par exemple, bien qu'il ait été avancé que les ensembles de petite taille offrent la possibilité d'unir la quantification verbale et non verbale, l'étape suivante consiste à le démontrer de manière expérimentale. Les études d'intervention pour tester les effets de différents types de facteurs externes peuvent également être utiles à cet égard. De même, il est nécessaire de poursuivre les recherches sur les relations entre les nombres verbaux et les nombres non verbaux afin de déterminer quelles sont les influences en jeu, à quel âge elles interviennent et dans quelles conditions.

Une autre question qui reste en suspens est celle de savoir si la quantification non verbale est basée sur des nombres discrets ou sur l'attention portée à des variables non numériques, telles que la surface. Bien que les chercheurs aient tenté de contrôler ces variables non numériques, une bonne alternative pourrait consister à concevoir des mesures qui tiennent compte des réponses non numériques plutôt que d'essayer de les contrôler.<sup>46,50,51</sup>

Enfin, de nouvelles recherches intéressantes sur la numératie en milieu familial et sur les origines des concepts de nombres à plusieurs chiffres ont soulevé un certain nombre de nouvelles questions qui méritent d'être étudiées. Par exemple, la plupart des études sur la numératie en

milieu familial se sont concentrées sur le calcul à l'âge préscolaire, mais il serait très utile de s'intéresser aux expériences à la petite enfance, en particulier compte tenu des preuves de quantification non verbale qui existent depuis longtemps dans cette tranche d'âge. Les nourrissons s'intéressent-ils aux nombres beaucoup plus tôt dans leur vie que ce que nous avons observé jusqu'à présent? Si tel est le cas, comment cela pourrait-il modifier notre compréhension de la SFON, par exemple? De même, l'acquisition inattendue et précoce de la signification des nombres à plusieurs chiffres soulève de nouvelles questions sur la présence de la numération à plusieurs chiffres dans le discours des parents, ainsi que sur la question de savoir si la variation de ces connaissances informelles est liée aux résultats futurs en mathématiques. Des interventions ciblant soit la numération en milieu familial, soit le calcul précoce à plusieurs chiffres, soit les deux, constitueraient de nouvelles orientations intéressantes pour la recherche future.

## Conclusions

Les preuves des aptitudes du nourrisson en ce qui concerne les nombres soulèvent des questions intrigantes sur les origines de la numération et les ressources conceptuelles auxquelles les jeunes enfants recourent pour apprendre le comptage verbal. Toutefois, d'autres recherches devront être effectuées pour révéler précisément ce qu'impliquent ces capacités du nourrisson et de quelle manière elles sont précisément liées au développement non verbal et verbal subséquent et si ces mécanismes peuvent être exploités pour aider tous les enfants à entrer à l'école avec une base solide de concepts de numération.

## Références

1. Gelman R, Gallistel CR. *The child's understanding of number*. Cambridge, MA: Harvard University Press; 1978.
2. Fuson KC. *Children's counting and concepts of number*. New York, NY: Springer-Verlag; 1988.
3. Mix KS, Huttenlocher J, Levine SC. *Quantitative development in infancy and early childhood*. New York, NY: Oxford University Press; 2002.
4. Clements DH, Sarama J. *Learning and teaching early math: The learning trajectories approach*. New York, NY: Routledge; 2009.
5. Litkowski EC, Duncan RL, Logan J AR, Purpura DL. When do preschoolers learn specific mathematics skills? Mapping the development of early numeracy knowledge. *Journal of*

*Experimental Child Psychology*. 2020;195:104846.

6. Wynn K. Children's understanding of counting. *Cognition* 1990;36(2):155-193.
7. Ramani GB, Siegler RS Playing linear numerical board games promotes low-income children's numerical development. *Cognition* 2008;11(5):655-661.
8. Mix KS, Prather RW, Smith LB, Stockton JD. Young children's interpretation of multidigit number names: From emerging competence to mastery. *Child Development* 2014;85(3):1306-1319.
9. Yuan L, Prather RW, Mix KS, Smith LB. Preschoolers and multi-digit numbers: A path to mathematics through the symbols themselves. *Cognition* 2019;189:89-104.
10. Mix KS. Children's equivalence judgments: Crossmapping effects. *Cognitive Development* 2008;23(1):191-203.
11. Huttenlocher J, Jordan NC, Levine SC. A mental model for early arithmetic. *Journal of Experimental Psychology: General*. 1994;123(3):284-296.
12. Yuan L, Prather RW, Mix KS, Smith LB. Number representations drive number-line estimates. *Child Development*. 2020;91(4):e952-e967.
13. Rasmussen C, Bisanz J. Representation and working memory in early arithmetic. *Journal of Experimental Child Psychology* 2005;91:137-157.
14. Cantlon J, Fink R, Safford K, Brannon EM. Heterogeneity impairs numerical matching but not numerical ordering in preschool children. *Developmental Science* 2007;10:431-440.
15. Mix KS. Similarity and numerical equivalence: Appearances count. *Cognitive Development* 1999;14:269-297.
16. Lipton JS, Spelke ES. Origins of number sense: Large-number discrimination in human infants. *Psychological Science*, 2003;14(5):396-401.
17. Xu F. Numerosity discrimination in infants: Evidence for two systems of representations. *Cognition*, 2003;89(1):B15-B25.
18. de Hevia MD, Izard V, Coubart A, Spelke ES, Streri A. Representations of space, time, and number in neonates. *Proceedings of the National Academy of Sciences*. 2014;111(13):4809-4813.

19. Izard V, Sann C, Spelke ES, Streri A. Newborn infants perceive abstract numbers. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*. 2009;106(25):10382-10385.
20. Dehaene S. *The number sense: How the mind creates mathematics*. New York, NY: Oxford University Press; 1997.
21. Feigenson L, Dehaene S, Spelke ES. Core systems of number. *Trends in Cognitive Science* 2004;8(7):307-314.
22. Xu F, Spelke ES, Goodard S. Number sense in human infants. *Developmental Science* 2005;8(1):88-101.
23. Halberda J, Feigenson L. Developmental change in the acuity of the “number sense”: The approximate number system in 3-, 4-, 5-, and 6-year-olds and adults. *Developmental Psychology* 2008;44(5):1457-1465.
24. Piazza M, DeFeo V, Panzeri S, Dehaene S. Learning to focus on number. *Cognition* 2018;181:35-45.
25. Shusterman A, Slusser E, Halberda J, Odic D. Acquisition of the cardinal principle coincides with improvement in approximate number system acuity in preschoolers. *PLoS ONE* ;11(4):e0153072.
26. Wilkey ED, Ansari D. Challenging the neurobiological link between number sense and symbolic numerical abilities. *Annals of the New York Academy of Sciences* 2020;1464(1):76-98.
27. Burr DC, Turi M, Anobile G. Subitizing but not estimation of numerosity requires attentional resources. *Journal of Vision* 2010;10(6):20.
28. Paliwal V, Baroody AJ. Cardinality principal understanding: The role of focusing on the subitizing ability. *ZDM* 2020;52(4):649-661.
29. Trick LM, Pylyshyn ZW. Why are small and large numbers enumerated differently? A limited-capacity preattentive stage in vision. *Psychological Review* 1994;101(1):80.
30. Revkin SK, Piazza M, Izard V, Cohen L, Dehaene S. Does subitizing reflect numerical estimation? *Psychological Science* 2008 Jun;19(6):607-614.
31. Cheyette SJ, Piantadosi ST. A unified account of numerosity perception. *Nature Human Behaviour* 2020;4(12):1265-1272.

32. Mix KS, Levine SC, Newcombe N. Development of quantitative thinking across correlated dimensions. In: Henik A, ed. *Continuous issues in numerical cognition: How many or how much*. London, UK: Academic Press: 2016;1-33.
33. Piaget J. *The child's conception of number*. New York NY: Norton; 1941.
34. Briars DJ, Siegler RS. A featural analysis of preschoolers' counting knowledge. *Developmental Psychology* 1984;20:607-618.
35. Frye D, Braisby N, Lowe J, Maroudas C, Nicholls J. Young children's understanding of counting and cardinality. *Child Development* 1989;60:1158-1171.
36. Conoyer SJ, Foegen A, Lembke ES. Early numeracy indicators. *Remedial Special Education* 2016;37(3):159-171.
37. Jordan NC, Kaplan D, Ramineni C, Locuniak MN. Early math matters: Kindergarten number competence and later mathematics outcomes. *Developmental Psychology* 2009;45(3):850-867.
38. Krajewski K, Schneider W. Exploring the impact of phonological awareness, visual-spatial working memory, and preschool quantity-number competencies on mathematics achievement in elementary school: Findings from a 3-year longitudinal study. *Journal of Experimental Child Psychology* 2009;103(4):516-31.
39. Missall KN, Mercer SH, Martínez RS, Casebeer D. Concurrent and longitudinal patterns and trends in performance on early numeracy curriculum-based measures in kindergarten through third grade. *Assessment for Effective Intervention* 2012;37(2):95-106.
40. Schneider RM, Brockbank E, Feiman R, Barner D. Counting and the ontogenetic origins of exact equality. *Cognition* 2022;218:104952.
41. Caviola S, Colling LJ, Mammarella IC, Szucs D. Predictors of mathematics in primary school: Magnitude comparison, verbal and spatial working memory measures. *Developmental Science* 2020;23:e12957.
42. Gobel SM, Watson SE, Lervag A, Hulme C. Children's arithmetic development: It is number knowledge, not the approximate number system, that counts. *Psychological Science* 2014;25(3): 789-798.
43. Kolkman ME, Kroesbergen EH, Leseman PP. Early numerical development and the role of non-symbolic and symbolic skills. *Learning and Instruction*. 2013;25:95-103.

44. Toll SW, Kroesbergen EH, Van Luit JE. Visual working memory and number sense: Testing the double deficit hypothesis in mathematics. *British Journal of Educational Psychology* 2016;86(3):429-445.
45. Carey S. Where our number concepts come from. *The Journal of Philosophy* 2009;106(4):220-254.
46. Leibovich T, Katzen N, Harel M, Henik A. (2017) From “sense of number” to “sense of magnitude”: The role of continuous magnitudes in numerical cognition. *Behavioral and Brain Sciences* 2017;40:e164.
47. Mix KS, Huttenlocher J, Levine SC. Multiple cues for quantification in infancy: Is number one of them? *Psychological Bulletin* 2002;128:278-294.
48. Smets K, Sasanguie D, Szűcs D, Reynvoet B. The effect of different methods to construct non-symbolic stimuli in numerosity estimation and comparison. *Journal of Cognitive Psychology* 2015;27(3):310-325.
49. Cordes S, Brannon EM. Crossing the divide: infants discriminate small from large numerosities. *Developmental Psychology* 2009;45(6):1583-1594.
50. Cantrell L, Smith LB. Open questions and a proposal: A critical review of the evidence on infant numerical abilities. *Cognition* 2013;128(3):331-352.
51. Sella F, Slusser E, Odic D, Krajcsi A. The emergence of children’s natural number concepts: Current theoretical challenges. *Child Development Perspectives* 2021;15(4):265-273.
52. Lourenco SF, Longo MR. General magnitude representation in human infants. *Psychological Science* 2010;21(6):873-881.
53. Baroody AJ, Dowker A. *The development of arithmetic concepts and skills: Constructing adaptive expertise*. Mahwah, NJ: Erlbaum; 2003.
54. Dehaene S. Varieties of numerical abilities. *Cognition* 1992;44(1-2):1-42.
55. Krajewski K, Schneider W. Early development of quantity to number-word linkage as a precursor of mathematical school achievement and mathematical difficulties: Findings from a four-year longitudinal study. *Learning and instruction* 2009;19(6):513-526.
56. Malone SA, Heron-Delaney M, Burgoyne K, Hulme C. Learning correspondences between magnitudes, symbols and words: Evidence for a triple code model of arithmetic development. *Cognition* 2019;187:1-9.

57. Mix KS, Sandhofer CM, Baroody A. Number words and number concepts: The interplay of verbal and nonverbal processes in early quantitative development. In: Kail RV, ed. *Advances in child development and behavior*. New York, NY: Academic Press; 2005:305-345.
58. Baroody AJ, Lai M, Mix KS Development of young children's early number and operation sense and its implications for early childhood education. In: Spodek B, Saracho ON, eds. *Handbook of research on the education of young children*. Mahwah, NJ: Erlbaum; 2006:187-221.
59. Clements DH, Sarama J, MacDonald BL. Subitizing: The neglected quantifier. In: Anderson A, Alibali MW, eds. *Constructing number: Merging perspectives from psychology and mathematics education*. Switzerland: Springer Cham; 2019;13-45.
60. Spelke E. What makes us smart? Core knowledge and natural language. In: Gentner D, Goldin-Meadow S, eds. *Language in mind*. Cambridge, MA: MIT Press; 2003.
61. Mix KS, Sandhofer CM, Moore JA, Russell C. Acquisition of the cardinal word principle: The role of input. *Early Childhood Research Quarterly*. 2012;27(2):274-283.
62. Sarnecka BW, Lee MD. Levels of number knowledge during early childhood. *Journal of Experimental Child Psychology*. 2009;103(3):325-337.
63. Mix KS. How Spencer made number: First uses of the number words. *Journal of Experimental Child Psychology* 2009;102:427-444.
64. Palmer A, Baroody AJ. Blake's development of the number words "one," "two," and "three". *Cognition and Instruction* 2011;29(3):265-96.
65. Baroody AJ, Mix KS, Kartal G, Lai ML. The development and assessment of early cardinal-number concepts. *Journal of Numerical Cognition* 2023;9(1):182-95.
66. Krajcsi A. Follow-up questions influence the measured number knowledge in the Give-a-number task. *Cognitive Development* 2021;57:100968.
67. Marchand E, Lovelett JT, Kendro K, Barner D. Assessing the knower-level framework: How reliable is the Give-a-Number task? *Cognition* 2022;222:104998.
68. O'Rear CD, McNeil NM, Kirkland PK. Partial knowledge in the development of number word understanding. *Developmental Science* 2020;23(5):e12944.
69. Libertus ME, Feigenson L, Halberda J. Preschool acuity of the approximate number system correlates with school math ability. *Developmental Science* 2011;14(6):1292-300.

70. Halberda J, Mazocco M, Feigenson L Individual differences in non-verbal number acuity predicts maths achievement. *Nature* 2008;455(7213):665-668.
71. Mazocco M, Feigenson L, Halberda J. Preschoolers' precision of the Approximate Number System predicts later school mathematics performance. *PLoS ONE* 2011;6(9):e23749.
72. Starr A, Libertus M, Brannon EM. Number sense in infancy predicts mathematical abilities in childhood. *Proceedings of the National Academy of Sciences* 2013;110(45):18116-18120.
73. DeSmedt B, Noel M-P, Gilmore C, Ansari D. How do symbolic and non-symbolic numerical magnitude processing skills relate to individual differences in children's mathematical skills? A review of evidence from brain and behavior. *Trends in Neuroscience and Education* 2013;2(2):48-55.
74. Holloway ID, Ansari D. Mapping numerical magnitudes onto symbols: The numerical distance effect and individual differences in children's mathematics achievement. *Journal of Experimental Child Psychology* 2009;103(1):17-29.
75. Sasanguie D, Göbel SM, Moll K, Smets K, Reynvoet B. Approximate number sense, symbolic number processing, or number-space mappings: What underlies mathematics achievement? *Journal of Experimental Child Psychology* 2013;114(3):418-431.
76. Soltész F, Szűcs D, Szűcs L. Relationships between magnitude representation, counting and memory in 4-to 7-year-old children: A developmental study. *Behavioral and Brain Functions* 2010;6(1):1-4.
77. Luculano T, Tang J, Hall CW, Butterworth B. Core information processing deficits in developmental dyscalculia and low numeracy. *Developmental Science* 2008;11(5):669-680.
78. Rousselle L, Noel MP. Basic numerical skills in children with mathematics learning disabilities: A comparison of symbolic vs. non-symbolic magnitude processing. *Cognition* 2007;102(3):361-395.
79. Elliott L, Feigenson L, Halberda J, Libertus ME. Bidirectional, longitudinal associations between math ability and approximate number system precision in childhood. *Journal of Cognition and Development* 2019;20(1):56-74.
80. Hannula MM, Lehtinen E. Spontaneous focusing on numerosity and mathematical skills of young children. *Learning and Instruction* 2005;15(3):237-256.

81. Gray SA, Reeve RA. Number-specific and general cognitive markers of preschoolers' math ability profiles. *Journal of Experimental Child Psychology* 2016. 147: 1-21.
82. Edens KM, Potter EF. An exploratory look at the relationships among math skills, motivational factors, and activity choice. *Early Childhood Education* 2013;41(3):235-243.
83. Hannula MM, Lepola J, Lehtinen E. Spontaneous focusing on numerosity as a domain-specific predictor of arithmetical skills. *Journal of Experimental Child Psychology* 2010;107(4):394-406.
84. Hannula-Sormunen MM, Lehtinen E, Räsänen P. Preschool children's spontaneous focusing on numerosity, subitizing, and counting skills as predictors of their mathematical performance seven years later at school. *Mathematical Thinking and Learning* 2015;17(2-3):155-177.
85. Gloor N, Leuenberger D, Moser Opitz E. Disentangling the Effects of SFON (Spontaneous Focusing on Numerosity) and Symbolic Number Skills on the Mathematical Achievement of First Graders. A Longitudinal Study. *Frontiers in Education* 2021;6:629201.
86. Braham EJ, Libertus ME, McCrink K. Children's spontaneous focus on number before and after guided parent-child interactions in a children's museum. *Developmental Psychology* 2018;54(8): 1492-1498.
87. Hannula-Sormunen M, Nanu C, Luomaniemi K, Heinonen M, Sorariutta A, Södervik I, Mattinen A. Promoting spontaneous focusing on numerosity and cardinality-related skills at day care with one, two, how many and count, how many programs. *Mathematical Thinking and Learning* 2020;22(4):312-331.
88. Hornburg CB, Borriello GA, Kung M, Lin J, Litkowski E, Cosso J, Ellis A, King Y, Zippert E, Cabrera NJ, Davis-Kean P. Next directions in measurement of the home mathematics environment: An international and interdisciplinary perspective. *Journal of Numerical Cognition* 2021;7(2):195-220.
89. Mutaf-Yıldız B, Sasanguie D, De Smedt B, Reynvoet B. Probing the relationship between home numeracy and children's mathematical skills: A systematic review. *Frontiers in Psychology* 2020;11:2074.
90. LeFevre JA, Skwarchuk SL, Smith-Chant BL, Fast L, Kamawar D, Bisanz J. Home numeracy experiences and children's math performance in the early school years. *Canadian Journal of Behavioural Science/Revue canadienne des sciences du comportement* 2009;41(2):55-66.

91. Anders Y, Rossbach HG, Weinert S, Ebert S, Kuger S, Lehrl S, Von Maurice J. Home and preschool learning environments and their relations to the development of early numeracy skills. *Early Childhood Research Quarterly* 2012;27(2):231-244.
92. Leyva D, Yeomans-Maldonado G, Weiland C, Shapiro A. Latino kindergarteners' math growth, approaches to learning, and home numeracy practices. *Journal of Applied Developmental Psychology* 2022;80:101417.
93. Missall K, Hojnoski RL, Caskie GI, Repasky P. Home numeracy environments of preschoolers: Examining relations among mathematical activities, parent mathematical beliefs, and early mathematical skills. *Early Education and Development* 2015;26(3):356-376.
94. Napoli AR, Purpura DJ. The home literacy and numeracy environment in preschool: Cross-domain relations of parent-child practices and child outcomes. *Journal of Experimental Child Psychology* 2018;166:581-603.
95. Levine SC, Suriyakham LW, Rowe ML, Huttenlocher J, Gunderson EA. What counts in the development of young children's number knowledge? *Developmental Psychology* 2010;46(5):1309-1319.
96. Mendelsohn A, Suárez-Rivera C, Suh DD, Tamis-LeMonda CS. Word by word: Everyday math talk in the homes of Hispanic families. *Language Learning and Development* 2023 Oct 2;19(4):386-403.
97. Ramani GB, Rowe ML, Eason SH, Leech KA. Math talk during informal learning activities in Head Start families. *Cognitive Development* 2015;35:15-33.
98. Susperreguy MI, Davis-Kean PE. Maternal math talk in the home and math skills in preschool children. *Early Education and Development* 2016;27(6):841-857.
99. Eason SH, Nelson AE, Dearing E, Levine SC. Facilitating young children's numeracy talk in play: The role of parent prompts. *Journal of Experimental Child Psychology* 2021;207:105124.
100. Gibson DJ, Gunderson EA, Levine SC. Causal effects of parent number talk on preschoolers' number knowledge. *Child Development* 2020;91(6):e1162-77.
101. Gunderson EA, Levine SC. Some types of parent number talk count more than others: Relations between parents' input and children's cardinal-number knowledge. *Developmental Science* 2011;14(5):1021-1032.